解析学 I 問題解説 ♯9

河野

演習問題 3.1　下記のヒントを参考にして上の漸化式を証明せよ。
ヒント： $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n} = \dfrac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ を積分すると $J_n = \displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx + a^2 J_{n+1}$ が得られるので，部分積分すると…。

$g = -\dfrac{1}{2n(x^2+a^2)^n}$ とおくと $g' = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx &= \int x\frac{x}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \int xg'\,dx \\ &= xg - \int x'g\,dx = xg - \int g\,dx\end{aligned}$$

である。

$$\int g\,dx = -\int \frac{1}{2n(x^2+a^2)^n}\,dx = -\frac{1}{2n}J_n$$

なので

$$\begin{aligned}J_n &= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx \\ &= \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx + \int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx \\ &= xg - \int g\,dx + a^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx \\ &= -\frac{x}{2n(x^2+a^2)^n} + \frac{1}{2n}J_n + a^2 J_{n+1}\end{aligned}$$

を整理すると漸化式が得られる。

演習問題 3.2　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{x(x-1)}$　(2) $\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}$

(3) $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$　(4) $\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

(5) $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$　(6) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

(7) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+2}$　(8) $\dfrac{1}{x^3+1}$

(9) $\dfrac{1}{x^4+1}$　(10) $\dfrac{3x^3+x^2+3}{(x-1)^2(x^2+2x+4)}$

(11) $\dfrac{2(x^3+4x^2+7x+6)}{(x+1)^2(x^2+2x+5)}$　(12) $\dfrac{x^3+4x^2+8x+16}{(x^2+4)(x+2)^2}$

(13) $\dfrac{2x^4+8x^3+20x^2+25x+19}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}$　(14) $\dfrac{x^4+2x^3+6x^2+9x+7}{(x^2+4)^2(x-1)}$

やり方により得られる積分の表示が解説と異なる場合もある。得られた関数を微分して被積分関数になれば解説と異なる形をしていても正しい結果である。部分分数展開を求める方法としてここでは，代入法をメインにする。

(1)　$\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1}$ とおき通分して分子の係数を比較すると

$$A(x-1) + Bx = 1 \tag{1}$$

が得られる。式 (1) に $x = 1$ を代入すると $B \cdot 1 = 1$ より $B = 1$ を得る。$x = 0$ を代入すると $A(0-1) = 1$ より $A = -1$ である。$\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$ と部分分数分解できる。よって

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \log|x-1| - \log|x|$$

(2)　$\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1}$ とおき通分して分子の係数を比較すると

$$A(x-1) + B(x+1) = 2x \tag{2}$$

が得られる。式 (2) に $x = 1$ を代入して $B = 1$，$x = -1$ を代入して $A = 1$ を得る。
$\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$ と部分分数分解できる。

$$\int \frac{2x}{(x+1)(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) dx = \log|x+1| + \log|x-1|$$

(3)　$\dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{(x-1)^2}$ とおき通分して分子の係数を比較すると

$$A(x-1)^2 + (Bx+C)x = x^2 + 1 \tag{3}$$

が得られる。式 (3) に $x = 0$ を代入すると $A = 1$ を得る。式 (3) に $A = 1$ を代入すると

$$(Bx+C)x = x^2 + 1 - (x-1)^2 = 2x$$

なので

$$Bx + C = 2$$

が恒等的に成立する。$B = 0, C = 2$ である。
$\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$ と部分分数分解できる。

$$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2}\,dx = \log|x| - \frac{2}{x-1}$$

(4)　分子の次数の方が高いので割り算を実行する。

$$x^3 = (x^2 - x + 1)(x+1) - 1$$

$$x^2 - x + 1 = (x-2)(x+1) + 3$$

より

$$x^3 = (x-2)(x+1)^2 + 3(x+1) - 1$$

となるので

$$\frac{x^3}{(x+1)^2} = x - 2 + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

とできる。

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\log|x+1| + \frac{1}{x+1}$$

(5) $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ と因数分解できるので，

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

とおき通分して分子の係数を比較すると

$$\begin{aligned}&A(x-1)(x+1)(x^2+1) + Bx(x+1)(x^2+1) + Cx(x-1)(x^2+1)\\ &\qquad + (Dx+E)x(x-1)(x+1) = 1\end{aligned} \tag{4}$$

が得られる。式 (4) に $x = 0, 1, -1, i$ を代入することにより，$A = -1, B = \frac{1}{4}, C = \frac{1}{4}, D = \frac{1}{2}, E = 0$ を得る。

$$\frac{1}{x(x^4-1)} = \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{x} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)}$$

と部分分数分解できる。

$$\int \frac{1}{x(x^4-1)}\,dx = \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{4}\log|x+1| - \log|\,x| + \frac{1}{4}\log|x-1|$$

(6) $n = 1, a = 1$ として漸化式を用いると

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + J_1\right)$$

なので

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x$$

(7) $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$ なので $t = x + 1$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx &= \int \left(\frac{t}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+1}\right) dt\\ &= \frac{1}{2}\log(t^2+1) - 2\arctan t\\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) - 2\arctan(x+1)\end{aligned}$$

(8)　$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ と因数分解できるので，$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$ とおき通分して分子を比較すると

$$A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=1 \tag{5}$$

を得る。式 (5) に $x=-1$ を代入すると $A=\dfrac{1}{3}$ を得る。

$$(Bx+C)(x+1)=-\frac{1}{3}(x^2-x+1)+1=-\frac{1}{3}(x^2-x-2)=-\frac{1}{3}(x-2)(x+1)$$

より $Bx+C=-\dfrac{1}{3}(x-2)$ となり $\dfrac{1}{3(x+1)}-\dfrac{x-2}{3(x^2-x+1)}$ と部分分数分解できる。x^2-x+1 は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ と変形して $t=x-\dfrac{1}{2}$ と置換積分することで次が得られる。

$$\int\frac{1}{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

(9)　これは因数分解が問題。

$$\begin{aligned}x^4+1&=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2\\&=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)\end{aligned}$$

と因数分解できる。$\dfrac{\sqrt{2}x+2}{4(x^2+\sqrt{2}x+1)}-\dfrac{\sqrt{2}x-2}{4(x^2-\sqrt{2}x+1)}$ と部分分数分解できる。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^4+1}\,dx=&\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\\&-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

(10) $f(x)=\dfrac{Ax+B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+4}$ とおくと，恒等的に $3x^3+x^2+3=(Ax+B)(x^2+2x+4)+(Cx+D)(x-1)^2$ が成立している。

　$x=1$ を代入すると $A+B=1$ を得る。両辺を x で微分して $x=1$ を代入すると $11=7A+4(A+B)$ を得る。よって $A=1,B=0$ である。このとき

$$(Cx+D)(x-1)^2=3x^3+x^2+3-x(x^2+2x+4)=2x^3-x^2-4x+3=(2x+3)(x-1)^2$$

より $C=2,D=3$ を得る。以上により

$$f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}+\frac{2x+3}{x^2+2x+4}$$

を得る。

$$I_1=\int\frac{x}{(x-1)^2}\,dx=\int\left(\frac{x-1+1}{(x-1)^2}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=\log|x-1|-\frac{1}{x-1}$$

$x^2+2x+4=x^2+2x+1+3=(x+1)^2+3$ なので $t=x+1$ とおくと

$$I_2=\int\frac{2x+3}{x^2+2x+4}\,dx=\int\frac{2t+1}{t^2+3}\,dt=\int\frac{2t}{t^2+3}\,dt+\int\frac{1}{t^2+3}\,dt$$

となる。前者は $u=t^2+3$ とおくと $\dfrac{du}{dt}=2t$ なので

$$I_{21}=\int\frac{2t}{u}\frac{1}{2t}\,du=\int\frac{1}{u}\,du=\log|u|=\log|t^2+3|=\log(t^2+3)=\log(x^2+2x+4)$$

後者は $t=\sqrt{3}\tan s$ とおくと $\dfrac{dt}{ds}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 s}=\dfrac{\sqrt{3}(\cos^2 s+\sin^2 s)}{\cos^2 s}=\sqrt{3}\left(1+\tan^2 s\right)$ より

$$\begin{aligned}I_{22}&=\int\frac{1}{t^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\,dt=\int\frac{1}{3\tan^2 s+3}\sqrt{3}\left(1+\tan^2 s\right)\,ds\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\int ds=\frac{s}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

となる。よって

$$I=\log|x-1|-\frac{1}{x-1}+\log(x^2+2x+4)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}$$

である。

(11) $\dfrac{2(x^3+4x^2+7x+6)}{(x+1)^2(x^2+2x+5)}=\dfrac{Ax+B}{(x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+5}$ とおいて通分した分子の恒等式を比較する。恒等式は

$$(Ax+B)(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x+1)^2=2(x^3+4x^2+7x+6) \tag{6}$$

なので式 (6) に $x=-1$ を代入して $-A+B=1$ を得る。式 (6) を微分すると

$$A(x^2+2x+5)+(Ax+B)(2x+2)+g(x)(x+1)=2(3x^2+8x+7) \tag{7}$$

となる。$g(x)$ の部分は計算できるのだが，この式は次に $x=-1$ を代入することにしか使用しないので，この部分が $x-1$ という因子をもつことだけで十分である。一般に $f(x)$ が多項式のとき $f(x)(x+a)^n$ の導関数は $g(x)(x+a)^{n-1}$ の形をしている。 式 (7) に $x=-1$ を代入すると，$A=1$ を得る。よって $B=2$ である。

$$\begin{aligned}(Cx+D)(x+1)^2&=2(x^3+4x^2+7x+6)-(Ax+B)(x^2+2x+5)\\&=2(x^3+4x^2+7x+6)-(x+2)(x^2+2x+5)=(x+2)(x+1)^2\end{aligned}$$

より

$$\frac{x+2}{(x+1)^2}+\frac{x+2}{x^2+2x+5}$$

と部分分数分解できる。

$x^2+2x+5=(x+1)^2+4$ なので $t=x+1$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=1$ より

$$I_1=\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx=\int\frac{t+1}{t^2+4}\,dt=\int\frac{t}{t^2+4}\,dt+\int\frac{1}{t^2+4}\,dt$$

となる。前者の積分は $u=t^2+4$ とおくと $\dfrac{du}{dt}=2t$ より

$$J_1=\int\frac{t}{t^2+4}\,dt=\int\frac{t}{u}\frac{1}{2t}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,du=\frac{1}{2}\log|u|=\frac{1}{2}\log|x^2+2x+5|$$

となる。後者は $t=2u$ とおくと $\dfrac{dt}{du}=2$ なので

$$J_2=\int\frac{1}{t^2+4}\,dt=\int\frac{1}{4u^2+4}2\,du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2+1}\,du=\frac{1}{2}\arctan u=\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}I&=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x+2}{x^2+2x+5}\right)dx\\&=\int\frac{1}{x+1}\,dx+\int\frac{1}{(x+1)^2}\,dx+I_1\\&=\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\log|x^2+2x+5|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(12) いままでの方法だと $\dfrac{x^3+4x^2+8x+16}{(x^2+4)(x+2)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+4}+\dfrac{Cx+D}{(x+2)^2}$ とおくのだが，ここでは $\dfrac{Cx+D}{(x+2)^2}$ を更に $\dfrac{C'}{x+2}+\dfrac{D'}{(x+2)^2}$ と分解するので，最初から

$$\frac{x^3+4x^2+8x+16}{(x^2+4)(x+2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}$$

とおく。恒等式を解くと $A=0,B=1,C=1,D=1$ が得られる。よって

$$\frac{x^3+4x^2+8x+16}{(x^2+4)(x+2)^2}=\frac{1}{x^2+4}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}$$

となる。

$$\int\frac{1}{x+2}\,dx=\log|x+2|$$
$$\int\frac{1}{(x+2)^2}\,dx=-\frac{1}{x+2}$$

である。

$x=2\tan t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=2(1+\tan^2 t)$ である，$x^2+4=4\tan^2 t+4=4(\tan^2 t+1)$ なので

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2+4}\,dx&=\int\frac{1}{4(\tan^2 t+1)}2(1+\tan^2 t)\,dt=\int\frac{1}{2}\,dt\\&=\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\int\frac{x^3+4x^2+8x+16}{(x^2+4)(x+2)^2}\,dx=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\log|x+2|-\frac{1}{x+2}$$

(13) 定数 A と 3 次以下の多項式 $f(x)$ を用いて

$$\frac{2x^4+8x^3+20x^2+25x+19}{\left(x^2+2x+3\right)^2(x+1)}=\frac{f(x)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}+\frac{A}{x+1}$$

と因数分解できる。これを通分すると

$$2x^4+8x^3+20x^2+25x+19=(x+1)f(x)+A\left(x^2+2x+3\right)^2 \tag{8}$$

が得られる。式 (8) に $x=-1$ を代入すると

$$2(-1)^4+8(-1)^3+20(-1)^2+25(-1)+19=(-1+1)f(-1)+A\left((-1)^2+2(-1)+3\right)^2$$

より $A=2$ となる。

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}&=\frac{2x^4+8x^3+20x^2+25x+19}{\left(x^2+2x+3\right)^2(x+1)}-\frac{A}{x+1}\\&=\frac{x+1}{\left(x^2+2x+3\right)^2(x+1)}=\frac{1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}\end{aligned}$$

よって $f(x)=1$ である。

$I=\displaystyle\int\frac{2x^4+8x^3+20x^2+25x+19}{\left(x^2+2x+3\right)^2(x+1)}\,dx$, $I_1=\displaystyle\int\frac{2}{x+1}\,dx$, $I_2=\displaystyle\int\frac{1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}\,dx$ とおくと

$$I=I_1+I_2$$

である。$t=x+1$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=1$ より

$$I_2=\int\frac{1}{\left((x+1)^2+2\right)^2}\,dx=\int\frac{1}{\left(t^2+2\right)^2}\,dt=\int\frac{1}{\left(t^2+\sqrt{2}^2\right)^2}\,dt$$

と変形して漸化式を用いると

$$L_2=\frac{t}{4(t^2+2)}+\frac{1}{4}\int\frac{1}{t^2+2}\,dt \tag{9}$$

となる。式 (9) の右辺の第 2 項は $t=\sqrt{2}u$ とおくと，$\dfrac{dt}{du}=\sqrt{2}$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int\frac{1}{t^2+2}\,dt&=\frac{1}{4}\int\frac{1}{(\sqrt{2}u)^2+2}\sqrt{2}\,du=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{1}{u^2+1}\,du\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan u=\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

以上により

$$I=\frac{x+1}{4(x^2+2x+3)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+2\log|x+1|$$

(14)

$\dfrac{x^4+2x^3+6x^2+9x+7}{(x^2+4)^2(x-1)}$ を部分分数展開する。

$g(x)=x^4+2x^3+6x^2+9x+7, f(x)=(x^2+4)^2(x-1)$ とおく。定数 A と 3 次以下の多項式 $g_1(x)$ が存在して

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g_1(x)}{(x^2+4)^2}+\frac{A}{x-1}$$

と部分分数展開できるので,

$$A(x^2+4)^2+g_1(x)(x-1)=g(x)$$

が成立している。この式に $x=1$ を代入すると $A=1$ が得られる。

$$\frac{g_1(x)}{(x^2+4)^2}=\frac{g(x)}{f(x)}-\frac{1}{x-1}=\frac{g(x)-(x^2+4)^2}{(x^2+4)^2(x-1)}=\frac{(x-1)(2x^2+9)}{(x^2+4)^2(x-1)}=\frac{2x^2+9}{(x^2+4)^2}$$

となるので

$$\frac{x^4+2x^3+6x^2+9x+7}{(x^2+4)^2(x-1)}=\frac{2x^2+9}{(x^2+4)^2}+\frac{1}{x-1}$$

と部分分数展開できる。

$J_1=\displaystyle\int\frac{1}{x^2+4}\,dx$, $J_2=\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx$ とおき,

$$\frac{2x^2+9}{(x^2+4)^2}=\frac{2(x^2+4)+1}{(x^2+4)^2}=\frac{2}{x^2+4}+\frac{1}{(x^2+4)^2}$$

を用いると

$$\int\frac{x^4+2x^3+6x^2+9x+7}{(x^2+4)^2(x-1)}\,dx=\int\frac{2}{x^2+4}\,dx+\int\frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx+\int\frac{1}{x-1}\,dx=2J_1+J_2+\log|x-1|$$

となる。

漸化式

$$J_2=\frac{x}{8(x^2+4)}+\frac{1}{8}J_1$$

を用いると

$$I=2J_1+\frac{x}{8(x^2+4)}+\frac{1}{8}J_1+\log|x-1|=\frac{17}{8}J_1+\frac{x}{8(x^2+4)}+\log|x-1|$$

J_1 を求めるため $x=2t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=2$ なので

$$J_1=\int\frac{1}{x^2+4}\,dx=\int\frac{2}{4t^2+4}\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=\frac{1}{2}\arctan t=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}$$

となる。よって

$$I=\frac{17}{16}\arctan\frac{x}{2}+\frac{x}{8(x^2+4)}+\log|x-1|$$