

演習問題 3.3 命題 3.5 を証明せよ。

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) = \frac{1+t^2}{2}$$

$$\sin x = \sin 2 \left( \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\left( 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) \times \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\left( \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \times \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos 2 \left( \frac{x}{2} \right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\left( \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \times \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\left( \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \times \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

なので,

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R \left( \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

となり有理関数の積分に帰着できる。

演習問題 3.4 次を示せ。

$$-\frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} - \frac{1}{\tan \frac{x}{2} - 1} - 2 \arctan \left( \tan \frac{x}{2} \right) = \tan x - x$$

$\arctan$  は  $\tan$  を  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  に制限した関数の逆関数なので  $-\frac{\pi}{2} < X < \frac{\pi}{2}$  のとき  $\arctan(\tan X) = X$  である。よって

$$2 \arctan \left( \tan \frac{x}{2} \right) = 2 \frac{x}{2} = x$$

である。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} - \frac{1}{\tan \frac{x}{2} - 1} &= -\frac{\tan \frac{x}{2} - 1 + \tan \frac{x}{2} + 1}{\left(\tan \frac{x}{2} + 1\right)\left(\tan \frac{x}{2} - 1\right)} \\ &= -\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} - 1} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

となるが  $\tan$  の加法定理を用いると  $\tan x$  になるので等式が成立する。

演習問題 3.5 次の関数の不定積分を求めよ。ただし (8), (9) において  $a, b$  ともに正とする。

$$\begin{array}{lll} (1) \sin x \cos x & (2) \sin^3 x & (3) \frac{1}{\cos x} \\ (4) \frac{1}{\tan x} & (5) \frac{1}{1 + \sin x} & (6) \frac{1}{\sin x - \cos x} \\ (7) \frac{\sin x}{1 + \cos x} & (8) \frac{1}{a + b \tan x} & (9) \frac{1}{a + b \sin x} \end{array}$$

(1) 三角関数は積の形になっているときは和に直すことで積分が簡単になる場合が多い。この問題の場合は積を和に直すことは倍角公式  $[\sin 2x = 2 \sin x \cos x]$  (の逆) に対応する。

$$\int \sin x \cos x dx = \int \frac{1}{2} \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x$$

(2) 積を和に直すことを繰り返し実行すると、または直接 3 倍角の公式を適用すると、

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$

となるので。

$$\int \sin^3 x dx = -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x$$

別の方法として、 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  と見て  $u = \cos x$  と変数変換してもできる。

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = -\int \{1 - u^2\} du \\ &= \frac{1}{3} u^3 - u = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x \end{aligned}$$

(3)  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  とおき置換積分を実行する。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \left\{ \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right\} dt \\ &= \log |1+t| - \log |1-t| = \log \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| - \log \left| 1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

(4)  $\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$  なので  $t = \sin x$  とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{\tan x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log |\sin x|$$

(5)  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  とおき置換積分を実行する。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{(1+t)^2} dt \\ &= -\frac{2}{1+t} = -\frac{2}{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

(6)  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  とおき置換積分を実行する。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x - \cos x} dx &= \int \frac{2}{t^2 + 2t - 1} dt = \int \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{t - \sqrt{2} + 1} - \frac{1}{t + \sqrt{2} + 1} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{2} + 1 \right| - \log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{2} + 1 \right| \right)\end{aligned}$$

(7)  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  とおき置換積分を実行する。

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2t}{1+t^2 + 1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2t}{1+t^2} dt = \log(1+t^2) = \log\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

(8)  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  においても勿論できるが,  $t = \tan x$  とおく。

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$$

より

$$I = \int \frac{1}{a + b \tan x} dx = \int \frac{1}{a + bt} \frac{1}{1+t^2} dt$$

分母が 1 次式と 2 次式の積なので部分分数分解を実行する。

$$\frac{1}{a + bt} \frac{1}{1+t^2} = \frac{A}{a + bt} + \frac{B + Ct}{1+t^2}$$

とおく。右辺を通分して両辺を比較すると

$$A(1+t^2) + (B + Ct)(a + bt) = 1$$

である。 $t = -\frac{a}{b}$  を代入すると  $A\left(1 + \left(-\frac{a}{b}\right)^2\right) = 1$  より  $A = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$  となる。

$$\begin{aligned}\frac{B + Ct}{1+t^2} &= \frac{1}{a + bt} \frac{1}{1+t^2} - \frac{b^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{a + bt} \\ &= \frac{1}{a + bt} \frac{1}{a^2 + b^2} \left( \frac{a^2 + b^2}{1+t^2} - \frac{b^2(1+t^2)}{1+t^2} \right) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \frac{1}{a + bt} \frac{a^2 - b^2 t^2}{1+t^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \frac{1}{a + bt} \frac{(a - bt)(a + bt)}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \frac{a - bt}{1+t^2}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{a^2 + b^2} \left( \frac{b^2}{a + bt} + \frac{a - bt}{1 + t^2} \right) dt \\ &= \frac{b^2}{a^2 + b^2} \int \frac{1}{a + bt} dt + \frac{a}{a^2 + b^2} \int \frac{1}{1 + t^2} dt - \frac{b}{a^2 + b^2} \int \frac{t}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{b}{a^2 + b^2} \log |a + bt| + \frac{a}{a^2 + b^2} \arctan t - \frac{b}{a^2 + b^2} \frac{1}{2} \log(1 + t^2) \end{aligned}$$

あとは  $t = \tan x$  を代入すればよいのだが, ここでは式をもう少し整理しておこう。

$$\arctan t = \arctan(\tan x) = x$$

また

$$1 + t^2 = 1 + \tan^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

より

$$-\frac{1}{2} \log(1 + t^2) = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{\cos^2}\right) = \frac{1}{2} \log(\cos^2 x) = \log(\cos^2 x)^{\frac{1}{2}} = \log |\cos x|$$

となる。これを代入すると

$$I = \frac{b}{a^2 + b^2} \log |a \cos x + b \sin x| + \frac{a}{a^2 + b^2} x$$

(9)  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  とおくと積分は

$$I = \int \frac{1}{a + b \sin x} dx = \int \frac{1}{a + b \frac{2t}{1 + t^2}} \frac{2}{1 + t^2} dt = \int \frac{2}{at^2 + 2bt + a} dt$$

分母の 2 次式の判別式 (の  $\frac{1}{4}$ ) を  $D$  とおくと  $D = b^2 - a^2$  である。  $D > 0$  のとき二次方程式は 2 つの実数解  $\alpha, \beta$  をもち分母は  $a(t - \alpha)(t - \beta)$  と因数分解できる。このときは部分分数分解を実行すればよい。

$D < 0$  のときは 1 次の項を消す変形後  $\int \frac{1}{1 + s^2} ds$  に帰着させればよい。  $D = 0$  のときは分母が 1 次式の 2 乗になるので積分が求まる。計算過程を省略して結果だけ書くと

$D > 0$  のとき

$$I = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \left| a \tan\left(\frac{x}{2}\right) + b - \sqrt{b^2 - a^2} \right| - \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \left| a \tan\left(\frac{x}{2}\right) + b + \sqrt{b^2 - a^2} \right|$$

$D < 0$  のとき

$$I = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left( \frac{a \tan\left(\frac{x}{2}\right) + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right)$$

$D = 0$  のとき

$$I = -\frac{2}{a \tan\left(\frac{x}{2}\right) + b}$$

演習問題 3.6 次の関数の不定積分を求めよ。

$$(1) \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}} \quad (2) \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} \quad (3) \frac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \quad (5) \sqrt{1-x^2}$$

(1)  $\sqrt{2-3x^2} = \sqrt{3\left(\frac{2}{3}-x^2\right)} = \sqrt{3}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - x^2}$  と変形できるので  $x = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin t$  とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3}} dt = \frac{1}{\sqrt{3}}t = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

(2)  $3+2x-x^2 = 4-x^2+2x-1 = 2^2 - (x-1)^2$  となるので  $u = x-1$  とおくと積分は

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-u^2}} du$$

となる。  $u = 2\sin t$  において置換積分を実行する。

$$I = \int dt = t = \arcsin \frac{u}{2} = \arcsin \left( \frac{x-1}{2} \right)$$

(3)  $\sqrt{3x^2-2} = \sqrt{3\left(x^2-\frac{2}{3}\right)} = \sqrt{3}\sqrt{x^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}$  と変形できるので  $x = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sin t}$  とい

て置換積分を実行する。  $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}$ ,  $\sqrt{3x^2-2} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{2}{3}} = \sqrt{2}\frac{\cos t}{\sin t}$  より

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{3x^2-2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sin t}\sqrt{2}\frac{\cos t}{\sin t}} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right) dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}x} \right) \end{aligned}$$

(4)  $x = 2\tan t$  とおくと  $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{\cos^2 t}$  であり,  $x^2+4 = 4(\tan^2 t+1) = \frac{4}{\cos^2 t}$  なので, 積分は

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int \frac{\cos t}{2} \frac{2}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\cos t} dt$$

となる。前問 (3) より

$$= \log \left| 1 + \tan \left( \frac{t}{2} \right) \right| - \log \left| 1 - \tan \left( \frac{t}{2} \right) \right|$$

となるので  $t = \arctan \frac{x}{2}$  を代入して

$$= \log \left| 1 + \tan \left( \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right| - \log \left| 1 - \tan \left( \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right|$$

(5)  $x = \sin t$  において置換積分を実行する。途中  $\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2}$  を用いる。

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int \{\cos 2t + 1\} dt \\ &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) = \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) \\ &= \frac{1}{2} \left( \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right)$  に  $t = \arcsin x$  を代入した,  $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} (\sin 2 \arcsin x)$  も勿論正解である。

**演習問題 3.7** 次を示せ。

$$\log \left| 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right| - \log \left| 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right| = \log \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right|$$

$$\log \left| 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right| - \log \left| 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right| = \log \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \right|$$

なので右辺の  $\log$  の絶対値のなかを計算する。

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} &= \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)}{\left(1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)} = \frac{1 + 2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} \\ &= \frac{\frac{x+1}{x+1} + 2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{x-1}{x+1}}{\frac{x+1}{x+1} - \frac{x-1}{x+1}} = \frac{\frac{2x}{x+1} + 2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{\frac{2}{x+1}} \\ &= \frac{x+1}{2} \left( \frac{2x}{x+1} + 2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) = x + \sqrt{(x+1)^2 \frac{x-1}{x+1}} \\ &= x + \sqrt{(x+1)(x-1)} = x + \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

**演習問題 3.8** 次の関数の不定積分を求めよ。

(1)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$     (2)  $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$     (3)  $\sqrt{x^2+2}$

(4)  $\frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

(1)  $\sqrt{1-x^2} = t(x+1)$  または同じことだが  $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  において置換積分を実行する。両辺を2乗して,  $t^2 = \frac{1-x}{1+x}$  となる。 $x$  について解くと  $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  を得る。 $\frac{dx}{dt} = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}$  であ

り,  $\sqrt{1-x^2} = t(x+1) = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = \frac{2t}{1+t^2}$  となる。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{1+t^2}{2t} \left( \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \right) dt = -2 \int \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= -2 \arctan t = -2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\end{aligned}$$

(2)  $\sqrt{x^2+1} = t-x$  において置換積分を実行する。両辺を 2 乗すると  $x^2+1 = t^2 - 2tx + x^2$  であり, これを  $x$  について解くと,  $x = \frac{t^2-1}{2t}$  となる,  $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2+1}{2t^2}$  であり  $\sqrt{x^2+1} = t-x = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{1+t^2}{2t}$  となる。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \int \frac{2t}{1+t^2} \frac{1+t^2}{2t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt \\ &= \log |t| = \log (\sqrt{x^2+1} + x)\end{aligned}$$

(3)  $\sqrt{x^2+2} = t-x$  において置換積分を実行する。両辺を 2 乗すると  $x^2+2 = t^2 - 2tx + x^2$  であり, これを  $x$  について解くと,  $x = \frac{t^2-2}{2t}$  となる,  $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2+2}{2t^2}$  であり  $\sqrt{x^2+2} = t-x = t - \frac{t^2-2}{2t} = \frac{t^2+2}{2t}$  となる。

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+2} dx &= \int \frac{t^2+2}{2t} \frac{t^2+2}{2t^2} dt = \frac{1}{4} \int \left\{ t + \frac{4}{t} + \frac{4}{t^3} \right\} dt \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} (\sqrt{x^2+2} + x)^2 + 4 \log (\sqrt{x^2+2} + x) - \frac{2}{(\sqrt{x^2+2} + x)^2} \right)\end{aligned}$$

(4)  $\sqrt{4-x^2} = t(x+2)$  または同じことだが  $t = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$  において置換積分を実行する。  $t^2 = \frac{2-x}{2+x}$  より  $x = \frac{2-2t^2}{1+t^2}$ ,  $\frac{dx}{dt} = -\frac{8t}{(1+t^2)^2}$ ,  $\sqrt{4-x^2} = t(x+2) = \frac{4t}{1+t^2}$  となる。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx &= -\int \left( \frac{1+t^2}{2-2t^2} \right)^2 \frac{1+t^2}{4t} \frac{8t}{(1+t^2)^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{t^2+1}{(1-t^2)^2} dt = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} \right\} dt \\ &= -\frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)} = -\frac{1}{2} \frac{t}{1-t^2} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}\end{aligned}$$

演習問題 3.9  $x \geq 1$  のとき  $I_2 = \pi + I_1$  を示せ。

不定積分の結果が正しいとすれば

$$F(x) = 2 \arctan(x + \sqrt{x^2-1}) + \arcsin \frac{1}{x}$$

とおけば  $F'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = 0$  となるので  $F(x)$  は定数である。  $x = 1$  を代入すると

$$F(1) = 2 \arctan(1 + \sqrt{1^2 - 1}) + \arcsin \frac{1}{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

となり示されるが、これは積分の結果を使っているので方法に不満がある。ここでは積分の結果を使わないで逆三角関数の性質を用いて示そう。

$a = \arctan(x + \sqrt{x^2 - 1})$  とおくと  $x + \sqrt{x^2 - 1} = \tan a$  ( $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ ) である。また  $b = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{x}$  とおくと  $\frac{1}{x} = \sin 2b$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq 2b \leq \frac{\pi}{2}$ ) である。

$$\frac{\pi}{2} - b = a$$

を示せばよい。今  $x \geq 1$  より  $b > 0$  である。よって  $0 \leq \frac{\pi}{2} - b < \frac{\pi}{2}$  が成立している。このとき

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \tan a$$

が示されれば証明が終わる。

$$x = \frac{1}{\sin 2b} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \tan a &= x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{\sin 2b} + \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2b} - 1} = \frac{1}{\sin 2b} + \sqrt{\frac{\cos^2 2b}{\sin^2 2b}} \\ &= \frac{1}{\sin 2b} + \frac{\cos 2b}{\sin 2b} = \frac{\cos^2 b + \sin^2 b}{2 \sin b \cos b} + \frac{\cos^2 b - \sin^2 b}{2 \sin b \cos b} \\ &= \frac{2 \cos^2 b}{2 \sin b \cos b} = \frac{\cos b}{\sin b} \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos b - \cos \frac{\pi}{2} \sin b}{\cos \frac{\pi}{2} \cos b + \sin \frac{\pi}{2} \sin b} = \frac{\cos b}{\sin b} \end{aligned}$$

よって  $\tan a = \tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$  が示された。

**演習問題 3.10** 今までは学んだ事に対応する演習問題で、演習問題の場所によってどの方法を使うかというのは明らかであった。最後に色々なタイプを混ぜて演習問題とする。積分計算の手法を身につけるのが目的なのですべてを解く必要はない。また中には難問もある。嗅覚(?)を働かせてそれを避ける練習にもなるかもしれない(?)。

次の関数の不定積分を求めよ。

(1)  $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

(2)  $\cos^2 x - \sin^2 x$

(3)  $\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$

(4)  $x \arcsin x$

(5)  $\frac{\cos 2x}{e^{3x}}$

(6)  $xe^{-x}$

(7)  $x \cos x$

(8)  $x^2 \sin x$

(9)  $e^{3x+1}$

(10)  $2x \arctan x$

(11)  $\log(2x+1)$

(12)  $\frac{1}{x(\log x)^n}$

(13)  $x^2 \log x$

(14)  $xe^{2x^2+3}$

(15)  $\frac{e^x}{x} + e^x \log x$



- (16)  $\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$  (17)  $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$  (18)  $\cos^n x \sin x$
- (19)  $(ax^2+bx+c)e^x$  (20)  $\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$  (21)  $\sin(\log x)$
- (22)  $x^3e^x$  (23)  $x^4e^x$  (24)  $\frac{1}{x^4+x^2+1}$
- (25)  $\frac{1}{1+x^2}$  (26)  $\frac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$  (27)  $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
- (28)  $\frac{1}{\cos^8 x}$  (29)  $\frac{1}{\sin x \cos^5 x}$  (30)  $\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$
- (31)  $\frac{x}{\sqrt{a-x}}$  (32)  $\frac{1}{3+\cos x}$  (33)  $\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$
- (34)  $\frac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$  (35)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  (36)  $\sqrt{x^2-1}$
- (37)  $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$  (38)  $\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$  (39)  $\frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$
- (40)  $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$  (41)  $\frac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$  (42)  $\frac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$
- (43)  $\frac{1}{4+x^2}$  (44)  $\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$  (45)  $\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$
- (46)  $3x^2e^{x^3+1}$  (47)  $\frac{1}{x^3(x+1)}$  (48)  $\frac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$
- (49)  $\frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$  (50)  $\frac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$  (51)  $\frac{3}{x^3-1}$
- (52)  $\frac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$  (53)  $\frac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$  (54)  $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$
- (55)  $\frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$  (56)  $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$  (57)  $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$
- (58)  $\frac{1}{2-\tan^2 x}$  (59)  $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$  (60)  $\frac{\cos x}{\sin^n x}$
- (61)  $\frac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$  (62)  $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$  (63)  $\frac{\log(\log x)}{x}$
- (64)  $\frac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$  (65)  $\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$  (66)  $\frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$
- (67)  $\frac{12}{x^3-8}$  (68)  $\frac{\sin x}{1+\sin x}$  (69)  $\sin 4x$
- (70)  $\frac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$  (71)  $\frac{x^2}{1+x^2} \arctan x$  (72)  $\frac{\sin x}{3+\tan^2 x}$
- (73)  $\log(1+\sqrt{x})$  (74)  $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$  (75)  $3x^2(x^3+5)^6$
- (76)  $\frac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$  (77)  $\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$  (78)  $e^{ax} \cos bx$
- (79)  $e^{ax} \sin bx$

問題が長いので解説の前に被積分関数をもう一度書いておく。

(1)  $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$  : いきなり「ルートのなかの2次式」を解く方法でやってもできるが,  $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} =$

$\frac{-x+x^3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -x\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - x\sqrt{1-x^2}$  と変形してから考え  
たほうが簡単かもしれない。  $t = 1 - x^2$  とおくと  $\frac{dt}{dx} = -2x$  である。

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \left\{ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - x\sqrt{1-x^2} \right\} dx = \int \left( \frac{x}{\sqrt{t}} - x\sqrt{t} \right) \left( -\frac{1}{2x} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right\} dt = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} \right) = -\frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{2\sqrt{1-x^2}}{3} \end{aligned}$$

(2)  $\cos^2 x - \sin^2 x$  : 三角関数の積は和に直すというのが一般的な考え方だが、この場合は加法定理の形そのものである。

$$\int \{ \cos^2 x - \sin^2 x \} dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x$$

(3)  $\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$  :  $\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^{3/2}}$  と見ると  $u = 1+x^2$  と置けばよいことに気づくだろう。

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} du = -\frac{1}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(4)  $x \arcsin x$  : 部分積分法。

$$I = \int x \arcsin x dx = \int \left( \frac{1}{2} x^2 \right)' \arcsin x dx = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

となるが、第 2 項の積分は  $x = \sin t$  とおくと

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \sin^2 t dt = \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t = \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \sin t \cos t \\ &= \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

となるので

$$I = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x - \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2}$$

(5)  $\frac{\cos 2x}{e^{3x}}$  : 部分積分を 2 回、一般的な形を後の (78) で考える。

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-3x} \cos 2x dx = \int \left( -\frac{1}{3} e^{-3x} \right)' \cos 2x dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} \cos 2x - \frac{2}{3} \int e^{-3x} \sin 2x dx \\ &= -\frac{1}{3} e^{-3x} \cos 2x - \frac{2}{3} \int \left( -\frac{1}{3} e^{-3x} \right)' \sin 2x dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} \cos 2x + \frac{2}{9} e^{-3x} \sin 2x - \frac{4}{9} I \end{aligned}$$

となるので、整理すると

$$I = \frac{1}{13} (-3e^{-3x} \cos 2x + 2e^{-3x} \sin 2x)$$

(6)  $xe^{-x}$  : 部分積分法。

$$\int xe^{-x} dx = \int x(-e^{-x})' dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

(7)  $x \cos x$  : 部分積分法。

$$\int x \cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$$

(8)  $x^2 \sin x$  : 部分積分法 2 回。

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= \int x^2(-\cos x)' dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx \\ &= -x^2 \cos x + \int 2x(\sin x)' dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \end{aligned}$$

(9)  $e^{3x+1}$  : 簡単な置換積分法。  $t = 3x + 1$  とおく。

$$\int e^{3x+1} dx = \int \frac{1}{3} e^t dt = \frac{1}{3} e^t = \frac{1}{3} e^{3x+1}$$

(10)  $2x \arctan x$  : 部分積分法。

$$I = \int 2x \arctan x dx = \int (x^2)' \arctan x dx = x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

ここで

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int \left\{ 1 - \frac{1}{1+x^2} \right\} dx = x - \arctan x$$

なので

$$I = x^2 \arctan x - x + \arctan x$$

(11)  $\log(2x+1)$  : 簡単な置換積分法 + 部分積分法。  $t = 2x + 1$  とおく。

$$\int \log(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int \log t dt = \frac{1}{2} (t \log |t| - t) = \frac{1}{2} ((2x+1) \log |2x+1| - (2x+1))$$

(12)  $\frac{1}{x(\log x)^n}$  :  $\frac{1}{x(\log x)^n} = (\log x)' \frac{1}{(\log x)^n}$  と考えると...。  $t = \log x$  とおく。  $n = 1$  のときは

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| = \log |\log x|$$

$n \neq 1$  のときは

$$\int \frac{1}{x(\log x)^n} dx = \int \frac{1}{t^n} dt = \frac{t^{1-n}}{1-n} = \frac{(\log x)^{1-n}}{1-n}$$

(13)  $x^2 \log x$  : 部分積分法。

$$\int x^2 \log x \, dx = \int \left(\frac{1}{3}x^3\right)' \log x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3$$

(14)  $xe^{2x^2+3}$  : 置換積分法。  $t = 2x^2 + 3$  とおく。

$$\int xe^{2x^2+3} \, dx = \int \frac{1}{4}e^t \, dt = \frac{1}{4}e^{2x^2+3}$$

(15)  $\frac{e^x}{x} + e^x \log x$  : 一方の関数を部分積分すると他の関数と打ち消しあって...

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{x} + e^x \log x \, dx &= \int \frac{e^x}{x} \, dx + \int (e^x)' \log x \, dx = \int \frac{e^x}{x} \, dx + e^x \log x - \int \frac{e^x}{x} \, dx \\ &= e^x \log x \end{aligned}$$

(16)  $\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$  : この様な問題の場合試行錯誤でやるしかない。色々な置き方を試してう

まくいくものを探す。まず思いつくのは  $t = \frac{x}{x+1}$  とおくことだろう。しかしこれを実行する

と(各自計算してみること),  $\int \frac{2t}{(1-t^2)^2} \arcsin \sqrt{t} \, dt$  となりこの積分は難しそうである。そこで

$t = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$  とおくと  $\int t \frac{2 \sin t}{\cos^3 t} \, dt$  となる。 $(\tan^2 t)' = \frac{2 \sin t}{\cos^3 t}$  に気が付くと部分積分を実行して...

$t = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$  とおくと  $\sqrt{\frac{x}{x+1}} = \sin t$  より  $\frac{x}{x+1} = \sin^2 t$  である。これを  $x$  について解くと  $x = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} = \tan^2 t$  である。 $dx = (\tan^2 t)' dt$  より

$$\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \, dx = \int t (\tan^2 t)' \, dt = t \tan^2 t - \int \tan^2 t \, dt$$

となる。

$$\begin{aligned} \int \tan^2 t \, dt &= \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \, dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} \, dt = \int \left\{ \frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right\} \, dt \\ &= \tan t - t \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \, dx &= t \tan^2 t - \tan t + t \\ &= x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \end{aligned}$$

(17)  $(2x+1) \sin(x^2+x+1)$  :  $(2x+1) \sin(x^2+x+1) = (x^2+x+1)' \sin(x^2+x+1)$  なので...。  
 $t = x^2+x+1$  とおく。

$$\int (2x+1) \sin(x^2+x+1) \, dx = \int \sin t \, dt = -\cos t = -\cos(x^2+x+1)$$

(18)  $\cos^n x \sin x$  :  $\cos^n x \sin x = -\cos^n x (\cos x)'$  なので...

$t = \cos x$  とおく。

$$\int \cos^n x \sin x dx = -\int t^n dt = -\frac{1}{n+1}t^{n+1} = -\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x$$

(19)  $(ax^2 + bx + c)e^x$  : 部分積分法 2 回。

$$\begin{aligned} \int (ax^2 + bx + c)e^x dx &= \int (ax^2 + bx + c)(e^x)' dx = (ax^2 + bx + c)e^x - \int (2ax + b)(e^x)' dx \\ &= (ax^2 + bx + c)e^x - (2ax + b)e^x + \int 2ae^x dx = (ax^2 + (b - 2a)x + c - b + 2a)e^x \end{aligned}$$

(20)  $\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$  : (16) で述べたように、どう変数変換するかは試行錯誤でやるしかない。少し積分に慣れれば、 $\arcsin x$  を消すという考え方で、「ルートの中の 2 次式」という見方からも、次のようにおくと気がつくと思う。この解説を見なくても自分でできた人はかなり積分に精通しつつあるといえる。

$t = \arcsin x$  とおくと、 $x = \sin t$  より  $1 - x^2 = \cos^2 t$  である。

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{t}{\cos^2 t} dt = \int t(\tan t)' dt = t \tan t - \int \tan t dt \\ &= t \tan t + \log |\cos t| = \frac{t \sin t}{\cos t} + \frac{1}{2} \log |\cos t|^2 \\ &= \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \log |1-x^2| \end{aligned}$$

(21)  $\sin(\log x)$  :  $t = \log x$  とおき  $\int e^t \sin t dt$  と変形。(79) 参照。

$$\begin{aligned} I &= \int e^t \sin t dt = \int (e^t)' \sin t dt = e^t \sin t - \int e^t \cos t dt \\ &= e^t \sin t - e^t \cos t + \int e^t \sin t dt = e^t \sin t - e^t \cos t + I \end{aligned}$$

となるので

$$\int \sin(\log x) dx = \frac{x(\sin(\log x) - \cos(\log x))}{2}$$

(22)  $x^3 e^x$  : 部分積分。

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= \int x^3 (e^x)' dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx = x^3 e^x - \left( 3x^2 e^x - \int 6x e^x dx \right) \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \end{aligned}$$

(23)  $x^4 e^x$  : 部分積分。

$$\begin{aligned} \int x^4 e^x dx &= x^4 e^x - \int 4x^3 e^x dx = (x^4 - 4x^3) e^x + \int 12x^2 e^x dx \\ &= (x^4 - 4x^3 + 12x^2) e^x - \int 24x e^x dx = (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) e^x \end{aligned}$$

(24)  $\frac{1}{x^4+x^2+1}$  : 因数分解が問題。やり方は以前やった  $x^4+1$  と同じで,  $x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$  と 2 乗の差にして因数分解を実行する。あとは有理関数の積分の定石で部分分数展開して...

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4+x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} \right\} dx \\ &= \frac{1}{4} (\log(x^2+x+1) - \log(x^2-x+1)) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right)\end{aligned}$$

(25)  $\frac{1}{1+x^2}$  :  $x = \tan t$  と置換積分。

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int dt = t = \arctan x$$

(26)  $\frac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$  :  $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x^2+1}$  と部分分数展開。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x)^2(x^2+1)} dx &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x}{x^2+1} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \log|x+1| - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \log(x^2+1) \right)\end{aligned}$$

(27)  $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$  : 「ルートの中の 2 次式」である。三角関数を用いる方法, 無理式を用いる方法のどちらでもできるが, 計算の難度は異なる。

$x = 2 \sin t$  とおく。

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int dt = t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

(28)  $\frac{1}{\cos^8 x}$  :  $I_n = \int \frac{1}{\cos^n x} dx$  とおき漸化式を求める。

$$\begin{aligned}I_n &= \int \left\{ \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^n x} \right\} dx = I_{n-2} + \int \sin x \left( \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x} \right)' dx \\ &= \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} + \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x}\end{aligned}$$

また

$$I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (\tan x)' dx = \tan x$$

漸化式を繰り返し適用すれば求まる。

$$\begin{aligned}I_8 &= \frac{6}{7} I_6 + \frac{\sin x}{7 \cos^7 x} = \frac{6}{7} \left( \frac{4}{5} I_4 + \frac{\sin x}{5 \cos^5 x} \right) + \frac{\sin x}{7 \cos^7 x} \\ &= \frac{6}{7} \frac{4}{5} \left( \frac{2}{3} I_2 + \frac{\sin x}{3 \cos^3 x} \right) + \frac{6}{7} \frac{\sin x}{5 \cos^5 x} + \frac{\sin x}{7 \cos^7 x} \\ &= \frac{6}{7} \frac{4}{5} \frac{2}{3} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{6}{7} \frac{4}{5} \frac{\sin x}{3 \cos^3 x} + \frac{6}{7} \frac{\sin x}{5 \cos^5 x} + \frac{\sin x}{7 \cos^7 x}\end{aligned}$$

(29)  $\frac{1}{\sin x \cos^5 x}$  :  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  においても計算できるが計算が複雑になるので、他の方法がある場合はそれで計算したほうがよい。この場合は  $t = \tan x$  とおいた方が計算は簡単である。一般に  $\sin x$  と  $\cos x$  の偶数乗、例えば  $\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x$  などは  $\tan x$  で表すことができる。

$t = \tan x$  とおくと  $I = \int \frac{1}{\sin x \cos^5 x} \cos^2 x dx = \int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dt$  となる。 $\sin x \cos x = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} =$

$$\frac{\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{t}{1 + t^2}, \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}$$

となるので  $I = \int \frac{(1+t^2)^2}{t} dt$  となる。

$$I = \int \frac{1}{\sin x \cos^5 x} dx = \int \left\{ \frac{1}{t} + 2t + t^3 \right\} dt = \log |\tan x| + \tan^2 x + \frac{1}{4} \tan^4 x$$

(30)  $\frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)}$  : これは  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  とおくしかないようである。 $\frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{2}$ ,  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $1 + \sin x = \frac{(1+t)^2}{1+t^2}$ ,  $1 + \cos x = \frac{2}{1+t^2}$  なので

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx &= \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{(1+t)^2}{1+t^2} \frac{1+t^2}{2} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

(31)  $\frac{x}{\sqrt{a-x}}$  :  $t=a-x$  とおくと...

$$\int \frac{x}{\sqrt{a-x}} dx = \int \frac{a-t}{\sqrt{t}(-1)} dt = \frac{2}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{a-x}$$

(32)  $\frac{1}{3 + \cos x}$  :  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  とおく。

$$\int \frac{1}{3 + \cos x} dx = \int \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan \frac{x}{2}\right)$$

(33)  $\frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x}$  :  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  とおく。

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx &= \int \frac{2t}{1+t^2} \frac{1+t^2}{2(t+1)} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2t}{(t+1)(1+t^2)} dt \\ &= \int \left\{ \frac{1+t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t} \right\} dt = \frac{1}{2} \log \left( \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right) + \frac{x}{2} - \log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right| \end{aligned}$$

(34)  $\frac{1}{(e^x + e^{-x})^4}$  :  $t = e^x$  とおくと,  $\int \frac{t^3}{(t^2+1)^4} dt$  となる。 $\frac{t^3}{(t^2+1)^4} = \frac{t^3+t}{(t^2+1)^4} - \frac{t}{(t^2+1)^4} = \frac{t}{(t^2+1)^3} - \frac{t}{(t^2+1)^4}$  なので...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(e^x + e^{-x})^4} dx &= \int \left\{ \frac{t}{(t^2+1)^3} - \frac{t}{(t^2+1)^4} \right\} dt = \frac{1}{6(t^2+1)^3} - \frac{1}{4(t^2+1)^2} \\ &= -\frac{3e^{2x} + 1}{12(e^{2x} + 1)^3} \end{aligned}$$

(35)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  : 「ルートの中の2次式」。

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

(36)  $\sqrt{x^2-1}$  : 「ルートの中の2次式」。

$$\int \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log(\sqrt{x^2-1}+x)$$

(37)  $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$  : 「ルートの中の2次式」。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \log(\sqrt{x^2-a^2}+x)$$

(38)  $\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$  : 「ルートの中の2次式」。  $x = \tan t$  とおくと,  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$ ,  $1+x^2 = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \cos t \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dx = -\frac{1}{\sin t}$$

$x = \tan t$ ,  $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  なので

$$= -\frac{1}{\tan t \cos t} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$t = \arctan x$  を直接代入して  $-\frac{1}{\sin(\arctan x)}$  でも正解である。

(39)  $\frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$  : 「ルートの中の2次式」。

$x = \tan t$  とおく。

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx = \int \cos^3 t \left(1 - \frac{\sin 2t}{\cos^2 t}\right) \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \left\{ \cos t - \frac{\sin^2 t}{\cos t} \right\} dt \\ &= \int \left\{ \cos t - \frac{1-\cos^2 t}{\cos t} \right\} dt = \int \left\{ 2\cos t - \frac{1}{\cos t} \right\} dt = 2\sin t - \int \frac{1}{\cos t} dt \end{aligned}$$

$J = \int \frac{1}{\cos t} dt$  は  $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$  として計算してもよいが, 変数を  $x$  に戻すと

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \log(\sqrt{1+x^2}+x) \quad \text{なので}$$

$$I = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \log(\sqrt{1+x^2}+x)$$



(40)  $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$  : 「ルートの中の2次式」 $x^2+2x-1=(x+1)^2-2$  なので  $u=x+1$

とおき, 更に  $u = \frac{\sqrt{2}}{\sin t}$  とおく。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}} dx &= - \int \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{2} \cos t} \frac{\sqrt{2} \cos t}{\sin^2 t} dt = - \frac{1}{\sqrt{2}} \int dt \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2}} t = - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left( \frac{\sqrt{2}}{x+1} \right) \end{aligned}$$

(41)  $\frac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$  : 「ルートの中の2次式」 $x = a \tan t$  とおくと,  $I = \frac{1}{a^4} \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t} dt$  となるので  $u = \sin t$  とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} dx &= \frac{1}{a^4} \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t} dt = \frac{1}{a^4} \int \frac{\cos t(1-\sin^2 t)}{\sin^4 t} dt = \frac{1}{a^4} \int \left\{ \frac{1}{u^4} - \frac{1}{u^2} \right\} du \\ &= \frac{1}{a^4} \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{3u^2} \right) = \frac{1}{a^4} \left( \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{3\sin^3 t} \right) \end{aligned}$$

ここで  $x = a \tan t$ ,  $\sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{\cos t}$  より  $\frac{1}{\sin t} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$  なので

$$= \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4 x} - \frac{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}{3a^4 x^3}$$

(42)  $\frac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$  :  $t = \sqrt{1+x^6}$  とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^6}} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{6} \int \left\{ \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right\} dt \\ &= \frac{1}{6} (\log|t-1| - \log|t+1|) = \frac{1}{6} \left( \log(\sqrt{1+x^6}-1) - \log(\sqrt{1+x^6}+1) \right) \end{aligned}$$

(43)  $\frac{1}{4+x^2}$  :  $x = 2 \tan t$  とおくと...

$$\int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{x}{2} \right)$$

(44)  $\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$  :  $t = \sqrt[3]{x+1}$  とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx &= \int \frac{3t^2}{1+t} dt = 3 \int \left\{ t - 1 + \frac{1}{1+t} \right\} dt \\ &= \frac{3}{2} (x+1)^{\frac{2}{3}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3 \log \left( (x+1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right) \end{aligned}$$

(45)  $\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$  : これは有理関数の積分。部分分数展開して...

$\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{g(x)}{(x^2+1)^2}$  ( $g(x)$  は3次式) とおき  $A, B, g(x)$  を求める。

右辺を通分して分子を比較すると

$$x(x^2 + 3) = A(x + 1)(x^2 + 1)^2 + B(x - 1)(x^2 + 1) + g(x)(x - 1)(x + 1)$$

与式に  $x = 1$  を代入すると  $A = \frac{1}{2}$ ,  $x = -1$  を代入すると  $B = \frac{1}{2}$  が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{(x^2 + 1)^2} &= \frac{x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{2(x + 1)} = \frac{x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2} - \frac{x}{x^2 - 1} \\ &= \frac{-x}{x^2 - 1} \frac{x^2 + 3 - (x^2 + 1)^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x}{x^2 - 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x(x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-x((x^2 + 1) + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x}{x^2 + 1} + \frac{-x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

より

$\frac{x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2(x + 1)} + \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$  と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned} \int \frac{x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2} dx &= \int \left\{ \frac{1}{2(x + 1)} + \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \log|x + 1| + \log|x - 1| - \log(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

(46)  $3x^2 e^{x^3+1}$  : 典型的な置換積分。慣れてきた人は見た瞬間に分かると思う。

$$\int 3x^2 e^{x^3+1} dx = e^{x^3+1}$$

(47)  $\frac{1}{x^3(x+1)}$  : これは有理関数の積分。

$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{g(x)}{x^3}$  ( $g(x)$  は 2 次式) とおき,  $A, g(x)$  を求める。右辺を通分して分子を比較すると

$$1 = Ax^3 + g(x)(x + 1)$$

与式に  $x = -1$  を代入すると  $A = -1$  を得る。

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x^3} &= \frac{1}{x^3(x+1)} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^3(x+1)} + \frac{x^3}{x^3(x+1)} = \frac{x^3 + 1}{x^3(x+1)} \\ &= \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^3(x+1)} = \frac{x^2 - x + 1}{x^3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$  と部分分数展開できるので

$$\int \frac{1}{x^3(x+1)} dx = \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$$

(48)  $\frac{2x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2}$  : これも有理関数の積分。ただし部分分数展開の後  $\frac{1}{(x^2 + 2)^2}$  の積分が出てくるので, 分母の次数を下げる変形が必要になる。 $n = 1, a = \sqrt{2}$  なので次数を下げる式は

$$J_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{x}{x^2 + 2} + J_1 \right)$$

となる。 $\frac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{g(x)}{(x^2+2)^2}$  ( $g(x)$  は 3 次式) とおき,  $A, g(x)$  を求める。右辺を通分して分子を比較すると

$$2x^2+x+4 = A(x^2+2)^2 + g(x)x$$

$x=0$  を代入すると  $A=1$  を得る。

$$g(x) = \frac{1}{x} (2x^2+x+4 - (x^2+2)^2) = -x^3-2x+1 = -x(x^2+2)+1$$

より  $\frac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{(x^2+2)^2}$  と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2} dx &= \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{(x^2+2)^2} \right\} dx \\ &= \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+2) + \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

(49)  $\frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$  : と部分分数展開する。  $\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$  等を分母の次数を下げて計算する

ので, 分母の次数を下げる変形が必要になる。  $J_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$  とすると  $J_3 = \frac{1}{4} \left( \frac{x}{(x^2+1)^2} + 3J_2 \right)$ ,

$J_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2+1} + J_1 \right)$  である。

$x^4-x^3-3x^2-x$  を  $x^2+1$  で割って行くと

$$x^4-x^3-3x^2-x = (x^2+1)^2 - (x+5)(x^2+1) + 4$$

なので  $\frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x+5}{(x^2+1)^2} + \frac{4}{(x^2+1)^3}$  と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3} dx &= \int \left\{ \frac{1}{x^2+1} - \frac{x+5}{(x^2+1)^2} + \frac{4}{(x^2+1)^3} \right\} dx \\ &= \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx - 5 \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx + 4 \int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx \\ &= J_1 + \frac{1}{2(x^2+1)} - 5J_2 + 4J_3 = J_1 + \frac{1}{2(x^2+1)} - 5J_2 + \left( \frac{x}{(x^2+1)^2} + 3J_2 \right) \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2} + J_1 - 2J_2 \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2} + J_1 - \left( \frac{x}{x^2+1} + J_1 \right) \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2+1} \end{aligned}$$

(50)  $\frac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$  : これも有理関数の積分, 分母を因数分解して...

$f(x) = x^4-x^3-x+1$  とおくと  $f(1) = 0$  なので  $x-1$  を因数に持つ。  $x-1$  で割った結果の多項式も  $x-1$  で  $x=1$  を解にもつので  $f(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)$  と因数分解できる。

$$\frac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1} = \frac{(x^4-x^3-x+1)+3x}{x^4-x^3-x+1} = 1 + \frac{3x}{x^4-x^3-x+1}$$

$\frac{3x}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{f(x)}{(x-1)^2} + \frac{g(x)}{x^2 + x + 1}$  ( $f(x), g(x)$  は 1 次式) とおき,  $f(x), g(x)$  を求める。  
 右辺を通分して分子を比較して

$$3x = f(x)(x^2 + x + 1) + g(x)(x - 1)^2 \quad (10)$$

式 (10) に  $x = 1$  を代入して  $f(1) = 1$  を得る。式 (10) の両辺を  $x$  で微分して

$$3 = f'(x)(x^2 + x + 1) + f(x)(2x + 1) + g'(x)(x - 1)^2 + g(x)2(x - 1) \quad (11)$$

式 (11) に  $x = 1$  を代入して  $3 = 3f'(1) + 3f(1)$  より  $f'(1) = 0$  を得る。 $f(x) = 1$  より  $g(x) = 1$ ,  
 よって  $\frac{x^4 - x^3 + 2x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2 + x + 1}$  と部分分数展開できる。 $x^2 + x + 1 =$   
 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$  なので  $t = x + \frac{1}{2}$  とおくと  $\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt$  となるので

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - x^3 + 2x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} dx &= \int \left\{ 1 + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2 + x + 1} \right\} dx \\ &= x - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \left( x + \frac{1}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

(51)  $\frac{3}{x^3 - 1}$  : これも有理関数の積分。 $\frac{3}{x^3 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{g(x)}{x^2 + x + 1}$  ( $g(x)$  は 1 次式) とおく。  
 右辺を通分して分子を比較すると

$$3 = A(x^2 + x + 1) + g(x)(x - 1)$$

$x = 1$  を代入して  $A = 1, g(x) = -(x+2)$  を得る。 $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$  なので  $t = x + \frac{1}{2}$

とおくと  $\int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \int \frac{t+\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}} dt$  となる。

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{x^3 - 1} dx &= \int \left\{ \frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1} \right\} dx \\ &= \log|x-1| - \sqrt{3} \arctan \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) \end{aligned}$$

(52)  $\frac{1}{e^x + 4e^{-x} + 3}$  :  $t = e^x$  とおくと,  $I = \int \frac{1}{t^2 + 3t + 4} dt$  となるので...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x + 4e^{-x} + 3} dx &= \int \frac{1}{t^2 + 3t + 4} dt = \int \frac{1}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{7}} \left( e^x + \frac{3}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

(53)  $\frac{\sin^2 x}{1 + 3\cos^2 x}$  :  $t = \tan \left( \frac{x}{2} \right)$  とおいてもできるが (29) で述べた方法でもできる。 $t = \tan x$

とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 3\cos^2 x} \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int \frac{t^2}{4+t^2} \frac{1}{1+t^2} dx = \frac{1}{3} \int \left\{ \frac{4}{4+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right\} dt \\ &= \frac{1}{3} \left( 4 \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\tan x}{2} \right) - \arctan(\tan x) \right) \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\tan x}{2} \right) - \frac{x}{3} \end{aligned}$$

(54)  $\frac{1}{e^x + e^{-x}} : t = e^x$  とおくと...

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctan t = \arctan(e^x)$$

(55)  $\frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$  : 倍角公式で 2 倍角の形に直した方が計算は簡単かもしれない。  $t = \cos 2x$  とおく。

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx &= \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x + 1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= -\frac{1}{2} \arctan(\cos 2x) \end{aligned}$$

(56)  $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$  :  $t = \sqrt{1-x}$  とおくと...

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = -2\sqrt{1-x}$$

(57)  $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$  :  $t = \sqrt{x}$  とおくと...

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2(t - \arctan t) = 2\sqrt{x} - 2\arctan(\sqrt{x})$$

(58)  $\frac{1}{2 - \tan^2 x}$  :  $t = \tan x$  とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 - \tan^2 x} dx &= \int \frac{1}{(2-t^2)(1+t^2)} dt = \frac{1}{3} \int \left\{ \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2-2} \right\} dt \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+t^2} dt + \frac{1}{6\sqrt{2}} \int \left\{ \frac{1}{t+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-\sqrt{2}} \right\} dt \\ &= \frac{1}{3} \arctan t + \frac{1}{6\sqrt{2}} \left( \log|t+\sqrt{2}| - \log|t-\sqrt{2}| \right) \\ &= \frac{1}{3} x + \frac{1}{6\sqrt{2}} \left( \log|\arctan x + \sqrt{2}| - \log|\arctan x - \sqrt{2}| \right) \end{aligned}$$

(59)  $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$  : 「ルートの中の 2 次式」  $x = 2 \sin t$  とおく。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int dt = t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

(60)  $\frac{\cos x}{\sin^n x}$  :  $\frac{\cos x}{\sin^n x} = \frac{(\sin x)'}{\sin^n x}$  と見て...

$$\int \frac{\cos x}{\sin^n x} dx = \frac{\sin^{1-n} x}{1-n}$$

(61)  $\frac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$  : 「ルートの中の 2 次式」  $\sqrt{1-x^2} = t(x+1)$  とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}} dx &= -2 \int \frac{1}{t^2+3} dt = -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \end{aligned}$$

(62)  $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$  : 「ルートの中の 2 次式」  $\sqrt{x^2-1} = t-x$  とおくと...

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \log(\sqrt{x^2-1} + x)$$

(63)  $\frac{\log(\log x)}{x}$  :  $\frac{\log(\log x)}{x} = (\log x)' \log(\log x)$  なので  $t = \log x$  とおくと...

$$\int \frac{\log(\log x)}{x} dx = \int \log t dt = t \log t - t = \log x \log(\log x) - \log x$$

(64)  $\frac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$  :  $\frac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}} = \frac{1}{3} \frac{(a^3+x^3)'}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$  と見て  $t = a^3+x^3$  とおくと...

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}} dt = \frac{1}{2} (a^3+x^3)^{\frac{2}{3}}$$

(65)  $\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$  :  $t = \sqrt{1-x}$  とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}} dx &= 2 \int \frac{1}{t^2-2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left\{ \frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}} \right\} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \log(\sqrt{1-x}-\sqrt{2}) - \log(\sqrt{1-x}+\sqrt{2}) \right) \end{aligned}$$

(66)  $\frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$  :  $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$  とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}} dx &= -4 \int \frac{t^2}{t^4-1} dx = \int \left\{ \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} - \frac{2}{1+t^2} \right\} dt \\ &= \log\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right) - \log\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right) - 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \end{aligned}$$

(67)  $\frac{12}{x^3-8}$  : 有理関数の積分。

$$\begin{aligned}\int \frac{12}{x^3-8} dx &= \int \left\{ \frac{1}{x-2} - \frac{x+4}{x^2+2x+4} \right\} dx \\ &= \log|x-2| - \frac{1}{2} \log(x^2+2x+4) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

(68)  $\frac{\sin x}{1+\sin x}$  :  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  とおくと...

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx &= \int \frac{4t}{(t+1)^2(1+t^2)} dt = \int \left\{ \frac{2}{t^2+1} - \frac{2}{(t+1)^2} \right\} dt \\ &= 2 \arctan t + \frac{2}{t+1} = x - \frac{2}{\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}\end{aligned}$$

(69)  $\sin 4x$  : 簡単な置換積分。  $t = 4x$  とおく。

$$\int \sin 4x dx = \frac{1}{4} \int \sin t dt = \frac{1}{4} \cos 4x$$

(70)  $\frac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$  :  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  とおくと...

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x(5+3\cos x)} dx &= \int \frac{t^2+1}{(t^2+4)(t-1)(t+1)} dt = \frac{1}{5} \int \left\{ \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{3}{t^2+4} \right\} dt \\ &= \frac{1}{5} \left( \log|t-1| - \log|t+1| + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{t}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{5} \log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \right| - \frac{1}{5} \log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right| + \frac{3}{10} \arctan\left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

(71)  $\frac{x^2}{1+x^2} \arctan x$  :  $t = \arctan x$  とおき,  $I = \int t(\tan t - t)' dt$  変形して部分積分。

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx &= \int t \tan^2 t dt = \int t(\tan t - t)' dt = t(\tan t - t) - \int \{\tan t - t\} dt \\ &= t(\tan t - t) + \log|\cos t| + \frac{1}{2} t^2 \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \arctan^2 x + \log|\cos \arctan x|\end{aligned}$$

(72)  $\frac{\sin x}{3+\tan^2 x}$  :  $\frac{\sin x}{3+\tan^2 x} = -\frac{(\cos x)'}{3+\tan^2 x}$  と見る。  $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$  は  $\cos$  で表されるので  $t = \cos x$  とおくと...

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{3+\tan^2 x} dx &= -\int \frac{t^2}{2t^2+1} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}} dt - \frac{1}{2} \int dt = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}t) - \frac{1}{2} t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2} \cos x) - \frac{1}{2} \cos x\end{aligned}$$

(73)  $\log(1 + \sqrt{x}) : t = \sqrt{x}$  とおくと....

$$\begin{aligned} \int \log(1 + \sqrt{x}) dx &= 2 \int t \log(t + 1) dt = \int (t^2)' \log(t + 1) dt = t^2 \log(t + 1) - \int \frac{t^2}{t + 1} dt \\ &= t^2 \log(t + 1) - \int \left\{ t - 1 + \frac{1}{t + 1} \right\} dt \\ &= x \log(\sqrt{x} + 1) \end{aligned}$$

(74)  $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} : t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  とおくと  $t^2 = \frac{1-x}{1+x}$  より  $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  ....

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} dx = - \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int \frac{4}{(1+t^2)^2} dt - \int \frac{4}{1+t^2} dt$$

漸化式  $J_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{t}{t^2+1} + J_1 \right)$  を用いて

$$= \frac{2t}{t^2+1} - 2 \arctan t = (x+1) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

(75)  $3x^2(x^3+5)^6 : 展開して計算しても勿論できるが, t = x^3 + 5$  とおくと....

$$\int 3x^2(x^3+5)^6 dx = \int t^6 dt = \frac{(x^3+5)^7}{7}$$

(76)  $\frac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}} : 「ルートの中の2次式」, \sqrt{2+x-x^2} = t(2-x)$  とおくと....

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}} dx = \int \frac{2}{4t^2+1} dt = \arctan \left( 2\sqrt{\frac{2-x}{1+x}} \right)$$

(77)  $\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} : x = a \sin t$  とおくと....

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &= a^2 \int \sin^2 t dt = a^2 \int \left\{ \frac{1-\cos 2t}{2} \right\} dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) = \frac{a^2}{2} \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} \end{aligned}$$

(78)  $e^{ax} \cos bx :$

(79)  $e^{ax} \sin bx : 2$  つまとめて考える。

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx dx, \quad I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx$$

とおく。部分積分を行うことにより

$$I_1 = \int \left( \frac{1}{a} e^{ax} \right)' \cos bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} I_2$$



を得る。同様に

$$I_2 = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} I_1$$

が分かるので，連立方程式を解いて

$$I_1 = \frac{1}{a^2 + b^2} (ae^{ax} \cos bx + be^{ax} \sin bx), \quad I_2 = \frac{1}{a^2 + b^2} (ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx)$$