解析学 I 問題解説 $\sharp$11

河野

演習問題 3.11　次の条件の下で微分方程式を立てよ。

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点を P とする。P における法線が x 軸と交わる点を N，P を x 軸へ正射影した点を Q とすると線分 QN の長さが常に一定である。

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点を P とする。P における接線が x 軸と交わる点を S，y 軸と交わる点を T とすると点 P は線分 ST の中点である。

(3) 空気中を落下する物体に働く空気の抵抗は速度の 2 乗に比例する。比例定数を k，重力定数を g とする。速度を v とするとき v が満たすべき微分方程式を求めよ。

(1)　点 $P(x,y)$ における接線の方程式は $Y=y'(X-x)+y$ なので，法線の方程式は

$$Y=-\frac{1}{y'}(X-x)+y$$

である。N は法線上の点なので座標を $(x_0,0)$ とすると，$0=-\dfrac{1}{y'}(x_0-x)+y$ が成立する。Q は $(x,0)$ なので x_0-x が一定である。これを C(定数) とおくと微分方程式

$$y'y=C$$

を得る。

(2)　接線の方程式は

$$Y=y'(X-x)+y$$

である。T の座標は $(0,2y)$ なので $2y=y'(0-x)+y$ が成立する。よって満たすべき微分方程式は

$$y'x+y=0$$

である。

(3)　運動方程式は力を F 加速度を a 質量を m としたとき

$$F=ma$$

であった。下向きを正の方向にとると働く力は重力と空気の抵抗力なので，$F=mg-kv^2$ となる。よって求める微分方程式は

$$mg-kv^2=mv'$$

である。

演習問題 3.12　次の微分方程式を解け。

(1) $yy'+x=0$

(2) 演習問題 3.11 (1) で得られた微分方程式

(3) 演習問題 3.11 (2) で得られた微分方程式

(4) 演習問題 3.11 (3) で得られた微分方程式

ここは変数分離型で解く。

(1)　$y\dfrac{dy}{dx} + x = 0$ なので，$ydy = -xdx$ となる。両辺を積分して，$\displaystyle\int ydy = -\int xdx$ より $\dfrac{1}{2}y^2 = -\dfrac{1}{2}x^2 + C$ を得る。よって

$$x^2 + y^2 = 2C$$

を得る。$C < 0$ のとき式を満たす (x, y) は存在しない。また $C = 0$ のときは $(x, y) = (0, 0)$ のみが式を満たす。これは曲線といえないので $C > 0$ である。

$r = \sqrt{2C}$ とおくと式は $x^2 + y^2 = r^2$ となる。よって求める曲線は原点中心の円である。

(2)　$y\dfrac{dy}{dx} = C$ より $ydy = Cdx$ を積分して，$\dfrac{1}{2}y^2 = Cx + C_1$ となる。よって

$$y = \pm\sqrt{2Cx + 2C_1}$$

を得る。

(3)　$x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ より $\dfrac{1}{y}dy = -\dfrac{1}{x}dx$ を積分して，$\log|y| = -\log|x| + C_1$ となる。

$$|y| = e^{\log|y|} = e^{-\log|x| + C_1} = e^{-\log|x|}e^{C_1} = \frac{e^{C_1}}{e^{\log|x|}} = \frac{e^{C_1}}{|x|}$$

より $y = \pm\dfrac{e^{C_1}}{x}$ となる。$C = \pm e^{C_1}$ とおくと，

$$y = \frac{C}{x}$$

を得る。

(4)　$mg - kv^2 = m\dfrac{dv}{dt}$ より $\dfrac{1}{g - \dfrac{k}{m}v^2}dv = dt$ となり，

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{\dfrac{k}{m}}v} + \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{\dfrac{k}{m}}v}\right)dv = dt$$

と変形 (部分分数分解) して積分すると，

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\sqrt{\frac{m}{k}}\log\left(\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}}v\right) - \sqrt{\frac{m}{k}}\log\left|\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}v\right|\right) = t + C_1$$

を得る。初期値を $v = 0$ と考えると $\sqrt{g} - \sqrt{\dfrac{k}{m}}v > 0$ と仮定できるので，絶対値をはずして変形すると，

$$\log\left(\frac{\sqrt{g} + \sqrt{\dfrac{k}{m}}v}{\sqrt{g} - \sqrt{\dfrac{k}{m}}v}\right) = 2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{m}}(t + C_1)$$

となるので，

$$\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\dfrac{k}{m}}v}{\sqrt{g}-\sqrt{\dfrac{k}{m}}v}=\exp\left(2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{m}}(t+C_1)\right)$$

となる。よって

$$v=\sqrt{g}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\exp\left(2\sqrt{g}\sqrt{\dfrac{k}{m}}(t+C_1)\right)-1}{\exp\left(2\sqrt{g}\sqrt{\dfrac{k}{m}}(t+C_1)\right)+1}$$

を得る。$t\to\infty$ としたとき $v\to\sqrt{g}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ となる。よってこの条件下では落下速度は $\sqrt{g}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ を超えない。