解析学 I 問題解説 ♯12

河野

演習問題 3.13　命題 3.13 を証明せよ。

演算子を

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

とし，微分方程式を

$$Ly = 0 \tag{1}$$

とする。微分の線型性より $D(ay) = aDy$ が成立している。さらに D を作用させることにより $D^2(ay) = D\left(D(ay)\right) = D\left(aDy\right) = aD\left(Dy\right) = aD^2y$ が成立することが分かる。以下同様に D を作用させることにより自然数 k に対し $D^k(ay) = aD^ky$ が成立する。よって

$$\begin{aligned}
L(ay) &= \left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)(ay) \\
&= a_n(x)D^n(ay) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(ay) + \cdots + a_1(x)D(ay) + a_0(x)(ay) \\
&= aa_n(x)D^ny + aa_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + aa_1(x)Dy + aa_0(x)y \\
&= a\left(a_n(x)D^ny + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + a_1(x)Dy + a_0(x)y\right) \\
&= a\left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)y \\
&= aLy
\end{aligned}$$

が成立する。よって y が線型微分方程式 (1) の解ならば ay も (1) の解である。

微分の線型性より $D(y_1+y_2) = Dy_1 + Dy_2$ が成立している。さらに D を作用させることにより $D^2(y_1+y_2) = D\left(D(y_1+y_2)\right) = D\left(Dy_1+Dy_2\right) = DDy_1 + DDy_2 = D^2y_1 + D^2y_2$ が成立することが分かる。以下同様に D を作用させることにより自然数 k に対し $D^k(y_1+y_2) = D^ky_1 + D^ky_2$ が成立する。よって

$$\begin{aligned}
L(y_1+y_2) &= \left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)(y_1+y_2) \\
&= a_n(x)D^n(y_1+y_2) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(y_1+y_2) + \cdots + a_1(x)D(y_1+y_2) + a_0(x)(y_1+y_2) \\
&= a_n(x)\left(D^ny_1 + D^ny_2\right) + a_{n-1}(x)\left(D^{n-1}y_1 + D^{n-1}y_2\right) + \cdots + a_1(x)\left(Dy_1+Dy_2\right) + a_0(x)\left(y_1+y_2\right) \\
&= a_n(x)D^ny_1 + a_{n-1}(x)D^{n-1}y_1 + \cdots + a_1(x)Dy_1 + a_0(x)y_1 \\
&\qquad + a_n(x)D^ny_2 + a_{n-1}(x)D^{n-1}y_2 + \cdots + a_1(x)Dy_2 + a_0(x)y_2 \\
&= \left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)y_1 \\
&\qquad + \left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)y_2 \\
&= Ly_1 + Ly_2
\end{aligned}$$

が成立する。よって y_1 および y_2 が線型微分方程式 (1) の解ならば y_1+y_2 も (1) の解である。

演習問題 3.14　次の微分方程式を演算子法を用いて解け。ただし解関数は複素数値関数でもよいとする。

(1) $y' + y\sin x = 0$

(2) $y' + (x+1)y = 0$

(3) $y' + e^{2x}y = 0$

(4) $y'' - 5y' + 6y = 0$

(5) $y'' - y' - 6y = 0$

(6) $y'' + y = 0$

(7) $y'' + 4y = 0$

(8) $y'' - 2y' + y = 0$

(9) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(1)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + \sin x)y = 0$$

と書き直すことができる。$\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$ より

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} = D + \sin x$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} y = 0$$

となる。両辺に左から $e^{-\cos x}$ をかけると

$$D\big(e^{-\cos x} y\big) = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{-\cos x} y = C$$

となるので

$$y = Ce^{\cos x}$$

である。

(2)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + (x+1))y = 0$$

と書き直すことができる。$\displaystyle\int (x+1)\ dx = \frac{1}{2}x^2 + x$ より

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) = D + (x+1)$$

が成立する。よって微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y = 0$$

となる。両辺に左から $\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$ をかけると

$$D\left(\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y\right) = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y = C$$

となるので

$$y = C\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)$$

である。
(3)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + e^{2x})y = 0$$

と書き直すことができる。$\displaystyle\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$ より

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)D\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) = D + e^{2x}$$

が成立する。よって微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)D\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)y = 0$$

となる。両辺に左から $\exp\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)$ をかけると

$$D\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)y = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)y = C$$

となるので

$$y = C\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

である。
(4)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2 - 5D + 6 = (D-3)(D-2)$ なので微分方程式は $(D-3)(D-2)y = 0$ となる。$u = (D-2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D-3)u = 0$ である。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}u = 0$ と変形できる。$v = e^{-3x}u$ とおき両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dv = 0$$

となる。両辺を積分すると

$$v = C_1$$

となるので

$$u = ve^{3x} = C_1e^{3x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-2)y = C_1e^{3x}$$

となる。

$$e^{2x}De^{-2x} = D-2$$

が成立するので，微分方程式は $e^{2x}De^{-2x}y = C_1e^{3x}$ となるが，$z = e^{-2x}y$ とおき両辺に左から e^{-2x} をかけると

$$Dz = C_1e^{x}$$

となる。両辺を積分すると $z = C_1e^{x} + C_2$ となるので一般解は

$$y = e^{2x}z = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$$

となる。
(5)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - D - 6)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2 - D - 6 = (D-3)(D+2)$ なので微分方程式は $(D-3)(D+2)y = 0$ となる。$u = (D+2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D-3)u = 0$ となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D-3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}u = 0$ となるが，$v = e^{-3x}u$ とおき両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dv = 0$$

となる。両辺を積分すると

$$v = C_1$$

となるので

$$u = ve^{3x} = C_1e^{3x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D+2)y = C_1e^{3x}$$

となる。

$$e^{-2x}De^{2x} = D+2$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-2x}De^{2x}y = C_1e^{3x}$ となるが，$z = e^{2x}y$ とおき両辺に左から e^{2x} をかけると

$$Dz = C_1e^{5x}$$

となる。両辺を積分すると $z = \dfrac{C_1}{5}e^{5x} + C_2$ となるので

$$y = e^{-2x}z = \frac{C_1}{5}e^{3x} + C_2e^{-2x}$$

となる。$\dfrac{C_1}{5}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$$

となる。

(6)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 1)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2 + 1 = (D - i)(D + i)$ なので微分方程式は $(D - i)(D + i)y = 0$ となる。$u = (D + i)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - i)u = 0$ となる。

$$e^{ix} D e^{-ix} = D - i$$

が成立するので，微分方程式は $e^{ix} D e^{-ix} u = 0$ となるが，$v = e^{-ix} u$ とおき両辺に左から e^{-ix} をかけると

$$Dv = 0$$

となる。両辺を積分すると $v = C_1$ となるので

$$u = ve^{ix} = C_1 e^{ix}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D + i)y = C_1 e^{ix}$$

となる。

$$e^{-ix} D e^{ix} = D + i$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-ix} D e^{ix} y = C_1 e^{ix}$ となるが，$z = e^{ix} y$ とおき両辺に左から e^{ix} をかけると

$$Dz = C_1 e^{2ix}$$

となる。両辺を積分すると $z = \dfrac{C_1}{2i} e^{2ix} + C_2$ となるので

$$y = e^{-ix} z = \frac{C_1}{2i} e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

となる。$\dfrac{C_1}{2i}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

となる。

(7)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 4)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2 + 4 = (D - 2i)(D + 2i)$ なので微分方程式は $(D - 2i)(D + 2i)y = 0$ となる。$u = (D + 2i)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - 2i)u = 0$ となる。

$$e^{2ix} D e^{-2ix} = D - 2i$$

が成立するので，微分方程式は $e^{2ix}De^{-2ix}u=0$ となるが，$v=e^{-2ix}u$ とおき両辺に左から e^{-2ix} をかけると

$$Dv=0$$

となる。両辺を積分すると $v=C_1$ となるので

$$u=ve^{2ix}=C_1e^{2ix}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D+2i)y=C_1e^{2ix}$$

となる。

$$e^{-2ix}De^{2ix}=D+2i$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-2ix}De^{2ix}y=C_1e^{2ix}$ となるが，$z=e^{2ix}y$ とおき両辺に左から e^{2ix} をかけると

$$Dz=C_1e^{4ix}$$

となる。両辺を積分すると $z=\dfrac{C_1}{4i}e^{4ix}+C_2$ となるので

$$y=e^{-2ix}z=\frac{C_1}{4i}e^{2ix}+C_2e^{-2ix}$$

となる。$\dfrac{C_1}{4i}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y=C_1e^{2ix}+C_2e^{-2ix}$$

となる。

(8)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2-2D+1)y=0$$

と書き直すことができる。$D^2-2D+1=(D-1)(D-1)$ なので微分方程式は $(D-1)(D-1)y=0$ となる。$u=(D-1)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D-1)u=0$ となる。

$$e^xDe^{-x}=D-1$$

が成立するので，微分方程式は $e^xDe^{-x}u=0$ となるが，$v=e^{-x}u$ とおき両辺に左から e^{-x} をかけると

$$Dv=0$$

となる。両辺を積分すると $v=C_1$ となるので

$$u=ve^x=C_1e^x$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-1)y=C_1e^x$$

となる。

$$e^xDe^{-x}=D-1$$

が成立するので，微分方程式は $e^xDe^{-x}y=C_1e^x$ となるが，$z=e^{-x}y$ とおき両辺に左から e^{-x} をかけると

$$Dz=C_1$$

となる。両辺を積分すると $z=C_1x+C_2$ となるので一般解は

$$y=e^xz=C_1xe^x+C_2e^x$$

となる。

(9)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2+4D+4)y=0$$

と書き直すことができる。$D^2+4D+4=(D+2)(D+2)$ なので微分方程式は $(D+2)(D+2)y=0$ となる。$u=(D+2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+2)u=0$ となる。

$$e^{-2x}De^{2x}=D+2$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-2x}De^{2x}u=0$ となるが，$v=e^{2x}u$ とおき両辺に左から e^{2x} をかけると

$$Dv=0$$

となる。両辺を積分すると $v=C_1$ となるので

$$u=ve^{-2x}=C_1e^{-2x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D+2)y=C_1e^{-2x}$$

となる。

$$e^{-2x}De^{2x}=D+2$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-2x}De^{2x}y=C_1e^{-2x}$ となるが，$z=e^{2x}y$ とおき両辺に左から e^{2x} をかけると

$$Dz=C_1$$

となる。両辺を積分すると $z=C_1x+C_2$ となるので一般解は

$$y=ze^{-2x}=C_1xe^{-2x}+C_2e^{-2x}$$

となる。

演習問題 3.15　次の微分方程式を実数値関数の範囲で解け。

(1) $y''+y=0$　　(2) $y''+\omega^2y=0\quad(0\neq\omega\in\mathbb{R})$

(3) $y''-y'+y=0$　　(4) $y''-2y'+2y=0$

(1)　微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$y=C_1e^{ix}+C_2e^{-ix}$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。
　オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いて変形する。

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

なので

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} = C_1 (\cos x + i \sin x) + C_2 (\cos x - i \sin x) \\ &= (C_1 + C_2)\cos x + (iC_1 - iC_2) \sin x \end{aligned}$$

と変形できる。$A_1 = C_1 + C_2, A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 \cos x + A_2 \sin x$$

という表示が得られる。
(2)　微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$y = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。
　オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いて

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x} = C_1 (\cos \omega x + i \sin \omega x) + C_2 (\cos \omega x - i \sin \omega x) \\ &= (C_1 + C_2)\cos \omega x + (iC_1 - iC_2) \sin \omega x \end{aligned}$$

と変形する。$A_1 = C_1 + C_2, A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 \cos \omega x + A_2 \sin \omega x$$

という表示が得られる。
(3)　微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$C_1 \exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。
　$\exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) = \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\exp\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ と変形してオイラーの公式を用いて

$$\begin{aligned} y &= C_1 \exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &= C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - i \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &= (C_1 + C_2)\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + (iC_1 - iC_2)\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \end{aligned}$$

と変形する。$A_1 = C_1 + C_2, A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + A_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

という表示が得られる。
(4)　微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$C_1 \exp\left((1+i)\,x\right) + C_2 \exp\left((1-i)\,x\right)$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。
　$\exp\left((1+i)\,x\right) = e^x e^{ix}$ と変形してオイラーの公式を用いて

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^x \left(\cos x + i \sin x\right) + C_2 e^x \left(\cos x - i \sin x\right) \\ &= \left(C_1 + C_2\right) e^x \cos x + \left(iC_1 - iC_2\right) e^x \sin x \end{aligned}$$

と変形する。$A_1 = C_1 + C_2, A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 e^x \cos x + A_2 e^x \sin x$$

という表示が得られる。

演習問題 3.16　次が成立することを示せ。
　2 次式 $\varphi(t) = t^2 + at + b$ に対し方程式 $\varphi(t) = 0$ は解 α, β を持つとする。微分方程式

$$\left(D^2 + aD + b\right) y = 0$$

を考える。この微分方程式の一般解は $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

であり，$\alpha = \beta$ のとき

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

　$\varphi(t) = 0$ の 2 解を α, β とすると $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$ より $\varphi(t) = (t-\alpha)(t-\beta)$ が成立する。このとき

$$(D-\alpha)(D-\beta) = D(D-\beta) - \alpha(D-\beta) = DD - D\beta - \alpha D + \alpha\beta$$

となるが β は定数なので $D\beta = \beta D$ が成立するので

$$\begin{aligned} &= D^2 - \beta D - \alpha D + \alpha\beta = D^2 - (\alpha+\beta)D + \alpha\beta \\ &= D^2 + aD + b \end{aligned}$$

が成立する。$u = (D-\beta)y$ とおくと u に関する微分方程式は

$$(D-\alpha)u = 0$$

となる。$e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} = D - \alpha$ より $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} u = 0$ となるが，$v = e^{-\alpha x} u$ とおき両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると

$$Dv = 0$$

となる。両辺を積分すると $v = C_1$ となるので

$$u = ve^{\alpha x} = C_1 e^{\alpha x}$$

となる。よって y についての微分方程式は $(D-\beta)y = C_1 e^{\alpha x}$ となる。

$$e^{\beta x} D e^{-\beta x} = D - \beta$$

が成立するので微分方程式は $e^{\beta x} D e^{-\beta x} y = C_1 e^{\alpha x}$ となるが，$z = e^{-\beta x} y$ とおき両辺に左から $e^{-\beta x}$ をかけると

$$Dz = C_1 e^{(\alpha-\beta)x}$$

となる。

ここで場合分けを行う。最初に $\alpha \neq \beta$ のときを考える。両辺を積分すると

$$z = \frac{C_1}{\alpha-\beta} e^{(\alpha-\beta)x} + C_2$$

となるので

$$y = e^{\beta x} z = \frac{C_1}{\alpha-\beta} e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。$\dfrac{C_1}{\alpha-\beta}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。

$\alpha = \beta$ のときは $e^{(\alpha-\beta)x} = 1$ なので式は

$$Dz = C_1$$

となる。両辺を積分すると

$$z = C_1 x + C_2$$

となり

$$y = e^{\beta x} z = C_1 x e^{\beta x} + C_2 e^{\beta x}$$

を得る。このときは $\alpha = \beta$ なので一般解

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

と表示できる。

演習問題 3.17　次が成立することを示せ。

$\varphi(t) = t^2 + at + b = 0$ は実数解を持たないとする。$\varphi(t) = 0$ の複素解を $\lambda_1 \pm i\lambda_2$ $(\lambda_2 \neq 0)$ とする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

の実数値関数としての一般解は

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

である。ここで C_1, C_2 は実数である任意定数。

$\varphi(t)=0$ の 2 解を α,β とすると $\varphi(t)=(t-\alpha)(t-\beta)$ が成立する。ただしここで $\alpha=\lambda_1+i\lambda_2$, $\beta=\lambda_1-i\lambda_2$ とする。このとき

$$D^2+aD+b=(D-\alpha)(D-\beta)$$

が成立する。$u=(D-\beta)y$ とおくと u に関する微分方程式は

$$(D-\alpha)u=0$$

となる。$e^{\alpha x}De^{-\alpha x}=D-\alpha$ より $e^{\alpha x}De^{-\alpha x}u=0$ となるが，$v=e^{-\alpha x}u$ とおき両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると

$$Dv=0$$

となる。両辺を積分すると $v=C_1$ となるので

$$u=ve^{\alpha x}=C_1e^{\alpha x}$$

となる。よって y についての微分方程式は $(D-\beta)y=C_1e^{\alpha x}$ となる。

$$e^{\beta x}De^{-\beta x}=D-\beta$$

が成立するので微分方程式は $e^{\beta x}De^{-\beta x}y=C_1e^{\alpha x}$ となるが，$z=e^{-\beta x}y$ とおき両辺に左から $e^{-\beta x}$ をかけると

$$Dz=C_1e^{(\alpha-\beta)x}$$

となる。今 $\alpha-\beta=2i\lambda_2\neq 0$ に注意して両辺を積分すると

$$z=\frac{C_1}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)x}+C_2$$

となるので

$$y=ze^{\beta x}=\frac{C_1}{\alpha-\beta}e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$$

となる。$\dfrac{C_1}{\alpha-\beta}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$$

となる。これは複素関数としての表示なので，これを書き直す。

オイラーの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を用いて

$$\begin{aligned}
y&=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}=C_1e^{(\lambda_1+i\lambda_2)x}+C_2e^{(\lambda_1-i\lambda_2)x}\\
&=C_1e^{\lambda_1 x}e^{i\lambda_2 x}+C_2e^{\lambda_1 x}e^{-i\lambda_2 x}\\
&=C_1e^{\lambda_1 x}\left(\cos\lambda_2 x+i\sin\lambda_2 x\right)++C_2e^{\lambda_1 x}\left(\cos\lambda_2 x-i\sin\lambda_2 x\right)\\
&=\left(C_1+C_2\right)e^{\lambda_1 x}\cos\lambda_2 x+\left(iC_1-iC_2\right)e^{\lambda_1 x}\sin\lambda_2 x
\end{aligned}$$

と変形する。C_1+C_2, iC_1-iC_2 をあらためて C_1, C_2 に置き直すと

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x}\cos\lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x}\sin\lambda_2 x$$

が得られる。

演習問題 3.18　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^2 + x$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = x + 4$

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = \sin 2x$

(6) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$

　非同次型は直接演算子法でもできるし，講義で紹介した，同次型の一般解と非同次型の特殊解を求めることによってもできる。ここでは 2 通りの方法を述べる。

(1)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D-3)y = e^{2x}$$

と書き直すことができる。

$$e^{3x} D e^{-3x} = D - 3$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{3x} D e^{-3x} y = e^{2x}$$

となる。$z = e^{-3x}y$ とおき両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dz = e^{-x}$$

となる。両辺を x で積分すると

$$z = -e^{-x} + C$$

となるので

$$y = ze^{3x} = -e^{2x} + Ce^{3x}$$

である。

　同次型の一般解と非同次型の特殊解を求めることで解を求める。

　同次型の一般解は e^{2x} を 0 に変更して同様に計算すればできるので省略する。各自計算すること。ここでは結果だけ使用する。$(D-3)y=0$ の一般解は $y_1 = Ce^{3x}$ である。

　$(D-3)y = e^{2x}$ の特殊解を $y_2 = Ae^{2x}$ の形をしていると予想する。$Dy_2 = 2Ae^{2x}$ なので

$$(D-3)y_2 = Dy_2 - 3y_2 = 2Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = -Ae^{2x} = e^{2x}$$

より，$A=-1$ なので特殊解は $y_2 = -e^{2x}$ である。よって求める解は

$$y = y_1 + y_2 = Ce^{3x} - e^{2x}$$

である。

(2)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D+2)y=\sin x$$

と書き直すことができる。

$$e^{-2x}De^{2x}=D+2$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{-2x}De^{2x}y=\sin x$$

となる。$z=e^{2x}y$ とおき両辺に左から e^{2x} をかけると

$$Dz=e^{2x}\sin x$$

となる。両辺を x で積分すると

$$z=\frac{2}{5}e^{2x}\sin x-\frac{1}{5}e^{2x}\cos x+C$$

となるので

$$y=ze^{-2x}=\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x+Ce^{-2x}$$

である。

[解 2] $(D+2)y=0$ の一般解を y_1 とすると $y_1=Ce^{-2x}$ である (各自計算すること)。
$(D+2)y=\sin x$ の特殊解 y_2 を $y_2=A\sin x+B\cos x$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D+2)y_2&=Dy_2+2y_2=A\cos x-B\sin x+2A\sin x+2B\cos x\\&=(2A-B)\sin x+(A+2B)\cos x\end{aligned}$$

である。これが $\sin x$ になるためには $2A-B=1, A+2B=0$ であればよい。よって $A=\dfrac{2}{5}, B=-\dfrac{1}{5}$ となるので，$y_2=\dfrac{2}{5}\sin x-\dfrac{1}{5}\cos x$ である。よって解は

$$y=y_1+y_2=Ce^{-2x}+\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x$$

である。

(3)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D+3)y=x^2+x$$

と書き直すことができる。

$$e^{-3x}De^{3x}=D+3$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{-3x}De^{3x}y=x^2+x$$

となる。$z=e^{3x}y$ とおき両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dz=e^{3x}\left(x^2+x\right)$$

となる。両辺を x で積分すると

$$z = \frac{1}{3}e^{3x}x^2 + \frac{1}{9}e^{3x}x - \frac{1}{27}e^{3x} + C$$

となるので

$$y = ze^{-3x} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27} + Ce^{-3x}$$

である。

[解 2] $(D+3)y = 0$ の一般解を y_1 とすると $y_1 = Ce^{-3x}$ である (各自計算せよ)。
$(D+3)y = x^2 + x$ の特殊解 y_2 を $y_2 = Ax^2 + Bx + C$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D+3)y_2 &= Dy_2 + 3y_2 = 2Ax + B + 3Ax^2 + 3Bx + 3C \\ &= 3Ax^2 + (2A+3B)x + B + 3C = x^2 + x\end{aligned}$$

より $3A = 1, 2A + 3B = 1, B + 3C = 0$ を得る。これを解くと $A = \dfrac{1}{3}, B = \dfrac{1}{9}, C = -\dfrac{1}{27}$ より $y_2 = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{9}x - \dfrac{1}{27}$ となる。よって

$$y = y_1 + y_2 = Ce^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27}$$

である。
(4)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = x + 4$$

と書き直すことができる。$D^2-2D-3 = (D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y = x+4$ となる。$u = (D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u = x + 4$ となる。

$$e^{-x}De^x = D + 1$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-x}De^x u = x + 4$ となるが，$v = e^x u$ とおき両辺に左から e^x をかけると

$$Dv = (x+4)e^x$$

となる。両辺を積分すると

$$v = xe^x + 3e^x + C_1$$

となるので

$$u = ve^{-x} = x + 3 + C_1e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-3)y = x + 3 + C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y = x+3+C_1e^{-x}$ となるが，$z = e^{-3x}y$ とおき両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dz = xe^{-3x} + 3e^{-3x} + C_1e^{-4x}$$

となる。両辺を積分すると

$$z = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{10}{9}e^{-3x} - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$$

となるので

$$y = ze^{3x} = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{9} - \frac{C_1}{4}e^{-x} + C_2e^{3x}$$

となる。$-\dfrac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{9} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$$

となる。

[解 2] $(D^2-2D-3)y = 0$ の一般解を y_1 とすると，$y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$ である (各自計算せよ)。

$(D^2-2D-3)y = x+4$ の特殊解を $y_2 = Ax+B$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D^2-2D-3)y_2 &= D^2y_2 - 2Dy_2 - 3y_2 = -2A - 3Ax - 3B \\ &= -3Ax + (-2A-3B) = x+4\end{aligned}$$

より $-3A = 1, -2A-3B = 4$ を得る。これを解くと $A = -\dfrac{1}{3}, B = -\dfrac{10}{9}$ となる。$y_2 = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{10}{9}$ なので

$$y = y_1 + y_2 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{10}{9}$$

である。

(5)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2-2D-3)y = \sin 2x$$

と書き直すことができる。$D^2-2D-3 = (D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y = \sin x$ となる。$u = (D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u = \sin x$ となる。

$$e^{-x}De^{x} = D+1$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-x}De^{x}u = \sin x$ となるが，$v = e^{x}u$ とおき両辺に左から e^{x} をかけると

$$Dv = e^{x}\sin 2x$$

となる。両辺を積分すると

$$z = \frac{1}{5}e^{x}\sin 2x - \frac{2}{5}e^{x}\cos 2x + C_1$$

となるので

$$u = ve^{-x} = \frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + C_1 e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-3)y = \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x + C_1 e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x} D e^{-3x} = D - 3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y = \frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + C_1e^{-x}$ となるが，$z = e^{-3x}y$ とおき両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dz = \frac{1}{5}e^{-3x}\sin 2x - \frac{2}{5}e^{-3x}\cos 2x + C_1 e^{-4x}$$

となる。両辺を積分すると

$$z = \frac{4}{65}e^{-3x}\cos 2x - \frac{7}{65}e^{-3x}\sin 2x - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$$

となるので

$$y = ze^{3x} = \frac{4}{65}\cos 2x - \frac{7}{65}\sin 2x - \frac{C_1}{4}e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

となる。$-\frac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = \frac{4}{65}\cos 2x - \frac{7}{65}\sin 2x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

となる。

[解 2] $(D^2 - 2D - 3)y = 0$ の一般解 y_1 は $y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$ である (各自計算せよ)。
$(D^2 - 2D - 3)y = \sin 2x$ の特殊解を $y_2 = A\cos 2x + B\sin 2x$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D^2-2D-3)y_2 &= D^2y_2 - 2Dy_2 - 3y_2 \\ &= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 4B\cos 2x + 4A\sin 2x - 3A\cos 2x - 3B\sin 2x \\ &= (-7A-4B)\cos 2x + (4A-7B)\sin 2x\end{aligned}$$

より $-7A - 4B = 0, 4A - 7B = 1$ を得る。よって $A = \frac{4}{65}, B = -\frac{7}{65}$ なので解は

$$y = y_1 + y_2 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{4}{65}\cos 2x - \frac{7}{65}\sin 2x$$

である。
(6)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = e^{2x}$$

と書き直すことができる。$D^2-2D-3=(D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y=e^{2x}$ となる。$u=(D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u=e^{2x}$ となる。

$$e^{-x}De^{x}=D+1$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-x}De^{x}u=e^{2x}$ となるが，$v=e^{x}u$ とおき両辺に左から e^{x} をかけると

$$Dv=e^{3x}$$

となる。両辺を積分すると

$$v=\frac{1}{3}e^{3x}+C_1$$

となるので

$$u=ve^{-x}=\frac{1}{3}e^{2x}+C_1e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-3)y=\frac{1}{3}e^{2x}+C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x}=D-3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y=\dfrac{1}{3}e^{2x}+C_1e^{-x}$ となるが，$z=e^{-3x}y$ とおき両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dz=\frac{1}{3}e^{-x}+C_1e^{-4x}$$

となる。両辺を積分すると

$$z=-\frac{1}{3}e^{-x}-\frac{C_1}{4}e^{-4x}+C_2$$

となるので

$$y=ze^{3x}=-\frac{1}{3}e^{2x}-\frac{C_1}{4}e^{-x}+C_2e^{3x}$$

となる。$-\dfrac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y=-\frac{1}{3}e^{2x}+C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$$

となる。

[解 2] $(D^2-2D-3)y=0$ の一般解は $y_1=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ である。$(D^2-2D-3)y=e^{2x}$ の特殊解 y_2 を $y_2=Ae^{2x}$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D^2-2D-3)y_2&=D^2y_2-2Dy_2-3y_2\\&=4Ae^{2x}-4Ae^{2x}-3Ae^{2x}\\&=-3Ae^{2x}=e^{2x}\end{aligned}$$

より $A = -\dfrac{1}{3}$ である。よって一般解は

$$y = y_1 + y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{3} e^{2x}$$

である。