

演習問題 1.7 命題 1.29 を証明せよ。

群の定義にある 3 つの性質を満たすことをチェックすればよい。

(1) 結合法則：

A, B, C を G/H の任意の元とする。代表元 $a, b, c \in G$ を用いて $A = [a], B = [b], C = [c]$ と表されているとする。

$$\begin{aligned}(AB)C &= ([a][b])[c] = [ab][c] = [(ab)c] = [a(bc)] \\ &= [a][bc] = [a]([b][c]) = A(BC)\end{aligned}$$

(2) 単位元： e を G の単位元として $E = [e]$ とおく。任意の $A = [a]$ に対し

$$\begin{aligned}AE &= [a][e] = [ae] = [a] = A \\ EA &= [e][a] = [ea] = [a] = A\end{aligned}$$

が成立するので E が単位元である。

(3) 逆元：任意の $A = [a]$ に対し $B = [a^{-1}]$ とおく。

$$\begin{aligned}AB &= [a][a^{-1}] = [aa^{-1}] = [e] = E \\ BA &= [a^{-1}][a] = [a^{-1}a] = [e] = E\end{aligned}$$

が成立するので B は A の逆元である。