基礎数学 I (# 1)

2002–4–18 河野

1 命題と論理

ここでは数理解析を学ぶ準備として,「論理」（数学的な意味での）について簡単に触れておく。数学的と括弧を付けた理由は数学の論理は一般社会で使われている論理よりもある意味では厳密だがその全てを定式化できているわけではないという点にある。一般の社会で使われている論理にはいろいろなものがある。「正しい」「間違っている」という以外にも,「多分」「きっと」「べきである」等々色々なものが考えられる。数学的に定式化できているのはその「単純」な場合だけである。例えば,「風が吹いたのに雨が降った」と「風が吹いてかつ雨が降った」を区別できない（しない)。付け加えておくと，様相論理，ファジー論理等そのような拡張の試みもなされている。我々は以下で「論理」を取り扱うが一般の論理と区別したい時には特に**数理論理** (*mathematical logic*) または**記号論理** (*symbolic logic*) と呼ぶ。

真 (T)，または偽 (F) が定まっている文章を**命題** (*proposition*) という。

例 1.1 P_1: 24 は 3 で割り切れる。
P_2: $1 = 1$
P_3: 2^{1999} は素数である。
P_4: 微分可能な関数は連続である。
P_5: 24 は大きな数である。
P_6: 数学は難しい。
P_7: $n \geqq 3$ の自然数に対し $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない。
以上の中で P_5,P_6 は命題ではないが (P_6 は正しい命題？)，それ以外は命題である

命題が幾つかあった時それを組合わせて新しい命題を作る方法がある。‘**かつ**’(**論理積**,disjunction, logical product)，‘**または**’(**論理和**,conjunction, logical sum)，‘$\cdots$ **でない**’(**否定**,negation)，‘**ならば**’ などがそれである。次の記号を使用する。

- $P \vee Q$:　P または Q である[1]
- $P \wedge Q$:　P かつ Q である
- $\neg P$:　P でない
- $P \Longrightarrow Q$:　P ならば Q である。

それぞれの記号の意味はほとんど明らかであろう。しかし，きちんと議論するためには次の様な真理表を使って定義する。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Longrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

[1] 日常では “一方のみが正しい時正しい” という使われ方をする時がある。数理論理学でこれに対応するのは排他的論理和である。

注意 1.2 我々がよく使っている記号‘ , (comma)’には注意が必要である。例えば次の様な使い方をする。

$$x^2 - 1 = 0 \text{ を解いて } x = -1, 1$$

$$x \text{ は } x > 0, x^2 = 1 \text{ を満たすので } x = 1$$

最初の comma は or（または）で２番目のは and（かつ）である。どちらにも使えて便利であるが，混同しがちになるので注意する必要がある。

$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$ を $P \Longleftrightarrow Q$ と表す。真理表を書いてみると分るが $(P \Longleftrightarrow Q)$ は P と Q の真理値が等しい時，その時のみ真である。

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

命題変数 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ から $\vee, \wedge, \neg, \Longrightarrow$ を用いてつくられた論理式 $F(P_1, \ldots, P_n)$ が常に真 (T) になる時，$F(P_1, \ldots, P_n)$ をトートロジー (同語反復,tautology) という。例えば $P \vee (\neg P)$ はトートロジーである。

$X \Longleftrightarrow Y$ がトートロジーの時，X と Y は**同値**であるといい，$X \equiv Y$ と表す。定義からすぐ分るように X の真理表と Y の真理表が同じならば２つの論理式は同値である。

例 1.3 (1) $\neg(\neg P) \equiv P$(２重否定の法則)

(2) $(P \Longrightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$

(3) $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$(de Morgan の法則)

(4) $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$(de Morgan の法則)

(5) de Morgan の法則より，

$$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

$$P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

が成立する (ここで $\neg$ の連結度が強いという略記法を使った)。この事より，論理記号だけから言うと「$\neg$ と $\wedge$」または「$\neg$ と $\vee$」の２つだけあれば他の記号はなくとも良い。なくても表現できるが分りやすいかどうかは別問題である。

(6) **対偶** $(P \Longrightarrow Q) \equiv (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$ である。これは元の命題と対偶命題が同値である事を示している。

演習問題 1.1 例 1.3 の (3),(4),(6) を示せ。

演習問題 1.2 次が正しい事を示せ。ただし，T は常に正しい命題，F は常に偽である命題とする。

(1) $P \wedge T \equiv P$, $P \vee T \equiv T$

(2) $P \wedge F \equiv F$, $P \vee F \equiv P$

(3) $P \vee P \equiv P, P \wedge P \equiv P$ 　(ベキ等律)

(4) $P \wedge \neg P \equiv F$ 　(矛盾率)

(5) $P \vee \neg P \equiv T$ 　(排中律)

(6) $P \vee Q \equiv Q \vee P, P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ 　(交換法則)

(7) $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R, P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$ 　(結合法則)

(8) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ 　(分配法則)

(9) $P \vee (P \wedge Q) \equiv P, P \wedge (P \vee Q) \equiv P$ 　(吸収法則)

電気回路と論理

数理論理は意外な所で応用される事がある。その１つの例としてここでは電気回路を取上げる。階段の上と下にスイッチがありどちらでも点滅の切り換えのできる回路を考える。回路を構成するスイッチを基本命題とし真であるということはスイッチが入っている事，偽は切れている事と考える。良く知られているように２つのスイッチ P，Q を直列に繋いだ回路は $P \wedge Q$ を実現していると考える事ができる。並列は $P \vee Q$ を実現していると考えられる。否定 $\neg P$ は何等かの構造でスイッチが切れている時電気が流れるシステムで実現されていると考える事ができる。

命題 P，Q から条件を満たすような回路に対応する論理式 $F(P,Q)$ をつくろう。Q の真偽によらず P の真偽で $F(P,Q)$ 真偽が変る必要がある。Q にとっても同様の条件が必要である。よって $F(P,Q)$ の真理表を仮に次の様に書くと

P	Q	$F(P,Q)$
T	T	A
T	F	B
F	T	C
F	F	D

A≠B,C≠D(Q の切り換えが有効になるために) と A≠C,B≠D(P の切り換えが有効になるために) が必要である。A=T または A=F によって２通りの場合があるが，ここでは A=T とする。この時真理表は

P	Q	$F(P,Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

となる。この真理表を持つ論理式は存在する。例えば $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$，$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$ などである。

勿論上の２つの論理式は同値である。これからそれぞれ回路を作る事ができる。この２つの回路は内部構造にまで立ち入ると実現のされ方は異なっている。しかし全体をブラックボックスと見て P,Q のスイッチの入り方で電気が流れるか流れないかという点のみに着目すると同じものと見る事ができる。いわば「製作者」の立場では違うが,「使用者」の立場では同じということができる。

演習問題 1.3 　スイッチが３つある場合を考える。

(1) ３つの命題 P, Q, R に対し前述のような命題 (P, Q, R の真偽が変わるとその命題の真偽が変わるような命題) を１つ作れ。(**Hint:** ２個の場合に作った命題を利用せよ。)

(2) それに基づいて回路を設計せよ。

演習問題 1.4 すべての自然数 n と各 $i(i = 1, \ldots, n)$ について「他の $P_j(j \neq i)$ を固定して P_i の値だけを変化させた時 $F_n(P_1, \ldots, P_n)$ の値も変化する。」様な命題 F_n を構成せよ ($P_1, \ldots, P_n$ は命題)。