基礎数学 I # 2 　　2002–4–25 　　河野

ここでは数学の論理で大切な役割をする「任意」と「存在」について取上げる。

数学の命題ではこの「任意」と「存在」が重要な役割を果たしている。最初は具体例をやろう。『実数から実数への写像 $y = f(x)$ が $x = a$ で極大である。』という命題を考える。これはきちんと書くと『ある正の実数 δ が存在して，任意の実数 x に対し $0 < |x - a| < \delta$ ならば $f(x) < f(a)$ である。』という事を意味している。テキスト２ページの問１でも，厳密に言うとそれらの前には任意の実数 $x_1, \ldots, x_n, x, y, z$ 等が省略されていて，それを付け加えなければ正確な命題とは言えない。このように数学的な「何か」を表現しようとすると「任意」「存在」は色々な所に顔を出す。

一般的に論じよう。『x は３以上である。』というような叙述のように不定元を含んでいるものは真偽が定まらないので命題ではないが，x に具体的なものが代入されて得られる叙述は命題である。このようなものを命題関数といい，不定元が x である事を強調して $P(x)$ のように表す。

$P(x)$ が命題関数の時,「集合 M の任意の元 x に対し $P(x)$ が成立する。」という叙述は命題になる。たとえば 「$P(x)$: x は３以上」とするとき『任意の実数 x に対し $P(x)$ が成立する』というのは命題である (正しくない命題)。また,「元 x が集合 M に存在して，命題 $P(x)$ が成立する。」という叙述も命題になる。『ある実数 x が存在して $P(x)$ が成立する』は命題である (正しい命題)。

「任意」「存在」を含んだ命題の否定命題を作るときは注意が必要である。『集合 M の任意の元 x に対し命題 $P(x)$ が成立する。』の否定は『集合 M の任意の元 x に対し命題 $P(x)$ が成立しない。』ではない。$P(x)$ が成立しない元が１つでもあればよいので『元 x が集合 M に存在して，命題 $P(x)$ が成立しない。』である。逆に『元 x が集合 M に存在して，命題 $P(x)$ が成立する。』の否定は『集合 M の任意の元 x に対し $P(x)$ が成立しない。』である。つまり否定命題を作る時は存在を任意に，任意を存在に変え命題を否定すればよいと言う事になる。

不定元が２つ (またはそれ以上) あるような命題関数を考える事ができる。例えば「$P(x, y)$: x は y より大きい」とするとき,『任意の実数 x に対し 実数 y が存在して $P(x, y)$ が成立する。』は命題である。同様に『ある実数 x が存在して任意の実数 y に対し $P(x, y)$ が成立する。』も命題である。これの否定命題はそれぞれ『ある実数 x が存在して任意の実数 y に対し $P(x, y)$ が成立しない。』『任意の実数 x に対しある実数 y が存在して $P(x, y)$ が成立しない。』である。

極限の数学的な定義は次のようである。『$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$』とは『任意の正の実数 ε に対しある正の実数 δ が存在して任意の実数 x に対し $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成立する。』ことと定義する。また『$\lim_{n \to \infty} a_n = a$』とは『任意の正の実数 ε に対しある自然数 N が存在して任意の自然数 n に対し $n > N$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$ が成立する。』ことと定義する。

演習問題 2.1 　『$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$』の否定命題を作れ。また『$\lim_{n \to \infty} a_n = a$』の否定命題を作れ。

演習問題 2.2 　次の命題を「任意」「存在」 の言葉を使って厳密な形で書き直せ。またその否定命題を作れ。

(1) [**フェルマーの最終定理**] $n \geq 3$ の自然数に対し $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

(2) [Goldbach **の問題**] 偶数は２個の素数の和で書き表せる。

(3) [**双子素数の問題**] いくらでも大きい双子素数 (p,$p + 2$ がともに素数) が存在する。

最期に付け足しとして論理記号を導入しておこう。これは興味ある人は読んでください。'任意' に対し '$\forall$' という記号を導入して，

$$\forall x \in M, P(x) \quad \text{または} \quad \forall x (x \in M \Longrightarrow P(x))$$

と表す ($\forall$ を全称記号という)。これを '存在' に対し $\exists$ という記号を導入して，

$$\exists x \in M; P(x) \quad \text{または} \quad \exists x (x \in M \wedge P(x))$$

と表す。

この記号はなかなか便利であるし論理構造を明確にする。例えば，否定命題を作ってみよう。以前考えた事を論理記号で書くと

$$\neg(\forall x \in M, P(x)) \Longleftrightarrow \exists x \in M;\ \neg P(x)\text{。}$$

同様に存在については

$$\neg(\exists x \in M; P(x)) \Longleftrightarrow \forall x \in M, \neg P(x)$$

となる (de Morgan の法則)。つまり否定命題を作る時は存在を任意に，任意を存在に変え命題を否定すればよいと言う事になる。

例として２人でやるゲームの必勝法の問題を考える。例えば,「A, B ２人がいて各自勝手な自然数を順に言って勝負を決める」ゲームを考える。A は k_1 と言い，B は k_2 と言ったとする。勝負を決めるルールはあらかじめ $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ の部分集合 X が決まっていて，$(k_1, k_2) \in X$ なら A の勝ち，$(k_1, k_2) \notin X$ なら B の勝ちとする。例えば，$X = \{(m, n) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \mid m \geq n\}$ とすると「大きい数を言った方の勝ち」というルールになる (正確には先手は小さくない数をいえば勝ち)。

この時どんなルール X に対しても,「両方に必勝法がある」ことは起らないが，A か B のどちらかに必勝法はあるのだろうか。一見分りにくいが必勝法ということを論理記号で書いてみよう。「A に必勝法がある」という命題を P,「B に必勝法がある」という命題を Q とする。この時，論理記号を使うと，

$$P: \quad \exists k_1 \in \boldsymbol{N}, \forall k_2 \in \boldsymbol{N}; (k_1, k_2) \in X$$

$$Q: \quad \forall k_1 \in \boldsymbol{N}, \exists k_2 \in \boldsymbol{N}; (k_1, k_2) \notin X$$

となる。つまり，$\neg P = Q$ である事はすぐ分るので P または Q，つまりどちらかに必勝法がある。