# グラフ理論要綱 #1

2003–6–5　　河野

理解の補助のためプリントを準備する事にしました。以前の分も簡単に復習しておく。

## 1　グラフの定義

グラフ $G$ とは有限集合 $V$ と $V$ の 2 元からなる部分集合全体の集合 $[V]^2$ のある部分集合 $E$ の組 $G=(V,E)$ の事と定義しました。この定義を初めて見てぱっと分かる人はあまりいないでしょう。でも皆はもう分かる様になっていますネ。**多重グラフ**や**準グラフ**の定義も自分でできますね。$e=\{x,y\}$ のとき $e=xy$ と書いて，$x$(または $y$) は $e$ に**接続している**といい，$x$ と $y$ は**隣接している**という。

$V$ の部分集合 $V(H)$ と $E$ の部分集合 $E(H)$ が存在して，$H=(V(H),E(H))$ がグラフになっているとき，$H$ を $G$ の**部分グラフ**といい，$H\subseteq G$ と書く。特に $V(H)=V$ となっているとき，$H$ を**全域部分グラフ**と呼ぶ。

グラフ $G$ のなかの**歩道** $P$ とは頂点と辺の交互列 $v_0e_1v_1e_2\cdots e_nv_n$ の事，ただし $e_i=v_{i-1}v_i$ となっているとする。特に $v_0$ を**始点**，$v_n$ を**終点**と呼ぶ。始点と終点以外の頂点を**内点**と呼ぶ。歩道において $e_i\neq e_j(i\neq j)$ かつ $v_i\neq v_j(i\neq j)$ となっているとき**道**という。頂点からなる部分集合 $A,B$ に対し始点が $A$ に属し，終点が $B$ に属し，内点が $A$ にも $B$ にも属さない道を $A$–$B$ **道**という。また与えられた部分グラフ $H$ に対し始点・終点のみが $H$ に属する非自明な道を $H$–**道**という。$P:=v_0e_1\cdots v_n$ が道であり，$e_0=v_nv_0\in E$ かつ $n\geqq 2$ のとき $C:=v_0e_1\cdots v_ne_0v_0$ を**サイクル**と呼ぶ。

グラフ $G$ の任意の 2 点に対し，一方の点を始点に他方の点を終点に持つ道が存在するとき，$G$ は**連結**であるという。グラフ $G$ は $G=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_n$ と書ける。ただし，各 $G_i$ は連結で，$G_i\cup G_j(i\neq j)$ は連結ではない。このとき各 $G_i$ を $G$ の**連結成分**という。

$G=(V,E)$ とする。$E$ の部分集合 $U$ に対し $G-U=(V,E-U)$ と定義する。$V$ の部分集合 $S$ に対してはこの定義ではグラフにならないの $E'=\{e\in E|\ e$ は $S$ の頂点と接続していない$\}$ とし，$G-S=(V-S,E')$ と定義する。

$G$ の頂点 $v$ に対し $v$ と接続する点の集合を $v$ の**近傍**といい $N_G(v)$ または単に $N(v)$ と書く。$S$ の要素の個数を $|S|$ と表し，$\deg(v)=|N(v)|$ を $v$ の**次数**という。また $G=(V,E)$ とするとき，$|G|=|V|$ と定義し $G$ の**位数**という。あまり使わないとは思うが $\|G\|=|E|$ という定義もある。$V$ の部分集合 $S$ に対し $N_G(S)=\bigcup_{v\in S}N_G(v)-S$ を $S$ の近傍と呼ぶ。単に $N(S)$ と書く場合もある。

## 2　木

サイクルを含まないグラフを**林**といい，連結な林を**木**と呼ぶ。木に関して次の定理が成立する。

**定理 2.1** グラフ $T$ に関して次の 4 つは同値である。

(1) $T$ は木である。

(2) $T$ の任意の 2 頂点は $T$ の中で唯一の道により結ばれている。

(3) $T$ は連結性関し極小である。即ち，$T$ は連結であるが，任意の辺 $e$ に対し $T-e$ は非連結である。

(4) $T$ は無サイクル性に関し極大である。即ち，$T$ は無サイクルであるが，任意の隣接しない 2 点 $x, y$ に対し $T + xy$ はサイクルを含む。

木 $T$ に対しその 1 頂点 $r$ が指定されているとき，$(T, r)$ を**根つき木**という。根つき木 $(T, r)$ の頂点 $V$ 上に次の様に**順序関係**を定める事ができる。頂点 $y$ に対し $r$ を始点とし $y$ を終点とする唯 1 つの道 $P(r, y)$ が定まるが，この道が頂点として $x$ を含んでいるとき $x \leqq y$ と定める。

グラフ $G$ に含まれる根つき木 $(T, r)$ が次の性質を持つとき**正規木**という；$G$ の中の任意の $T$–道の両端点も $T$ が定める順序で比較可能 (頂点 $x, y$ に関し $x \leqq y$ または $y \leqq x$ が成立する) である。正則木はコンピュータサイエンスでは**深さ優先探索木**と呼ばれているようです。

**命題 2.2** 任意の連結グラフは，任意に指定した頂点を根に持つ全域正則木を部分グラフとして含む。

この命題の証明をよく見ると全域正則木を発見する次のアルゴリズムが見つかる。

(1)$r$ を出発点として $G$ の辺をたどりながらまだ訪れてない頂点を探し可能な限り進む。その様な頂点が発見できないときは (2) へ行く。
(2) 今居る頂点から 1 つ戻って (3) へ行く。(来た経路は覚えているものとする)
(3) 今居る頂点を出発点にして $G$ の辺をたどりながらまだ訪れてない頂点を探し可能な限り進む。その様な頂点が発見できないときは，今居る頂点が $r$ なら終了，そうでなければ (2) へ行く。

これが本当にアルゴリズムになっているかチェックして下さい。できればプログラムもよろしく。

## 3 マッチング

グラフ $G = (V, E)$ に対し独立な辺の集合 $M$ を**マッチング**と呼ぶ。即ち $M \subseteq E$ であり，任意の $e_1, e_2 \in M$ $(e_1 \neq e_2)$ に対し $e_1$ の頂点と $e_2$ の頂点は同じ頂点を含まない。頂点の集合 $U$ が次を満たすとき $U$ は $M$ に**マッチされている**という；$\forall v \in U, \exists e \in M$; $v$ は $e$ と接続している。$U$ がマッチング $M$ でマッチされているとき，$M$ を $U$ のマッチングと呼ぶ。

$G = (V, E)$ が任意の頂点 $v$ に対し $\deg(v) = k$ となっているとき，$G$ は $k$–**正則**であるという。$k$–正則全域部分グラフを $k$–**因子**という。1–因子はマッチングである。

グラフ $G = (V, E)$ とマッチング $M$ を考える。我々は個数が一番多いマッチング (それを**最大マッチング**と呼ぶ) を探したい。そのために次を定義する。道 $P := v_0 e_1 v_1 \cdots e_n v_n$ が $M$ **に関する交互道**であるとは $e_{2i-1} \notin M$ かつ $e_{2i} \in M$ $(i = 1, 2, \ldots)$ かつ $v_0$ は $M$ に属する辺の頂点になっていないときをいう。$P$ が交互道であり，$v_n$ が $M$ に属する辺の頂点になっていないとき $M$ **に関する増大道**という。$M$ が交互道のとき $M' = (M - \{e_2, e_4, \ldots\}) \cup \{e_1, e_3, \ldots\}$ はまたマッチングになっているので，$P$ が増大道なら $|M'| = |M| + 1$ となっている。次の命題は最大マッチングを求めるアルゴリズムを与える。

**命題 3.1** $M$ が最大でないマッチングならば $M$ に関する増大道が存在する。

$G = (V, E)$ が $V = A \cup B$ $(A \cap B = \emptyset)$ と分かれていて，$A$ 同士及び $B$ 同士を結ぶ辺が存在しないとき 2 **部グラフ**という。**しばらくの間特に断らない限りグラフは 2 部グラフを仮定する。**$A, B$ も $V$ の分割を意味するものとして固定しておく。対称性より $|A| \leqq |B|$ としておく。$A$ のマッチングを探す事を考える。2 部グラフのマッチングに関して次の定理がある。

**定理 3.2** [Köning 1931] $G$ の最大マッチングが含む辺の個数は，頂点被覆が含む点の個数の最小値に等しい。

ここで $U$ が**頂点被覆**であるとは，$G$ の任意の辺に対しその頂点となる点が $U$ のなかに存在する事をいう。

　$A$ のマッチングが存在すれば，任意の $S \subseteq A$ に対し $|N(S)| \geqq |S|$ はすぐに分かるがこの条件は十分条件にもなっている。

**定理 3.3** [**結婚定理** Hall 1935] $A$ がマッチングを持つ必要十分条件は $\forall S \subseteq A$ に対し $|N(S)| \geqq |S|$ が成立する事である。

これの系として次が従う。

**系 3.4** $G$ が $k$–正則なら 1–因子を持つ。

**系 3.5** $G$ は一般のグラフとする。$2k$–正則なら 2–因子を持つ。

　以下 $G$ は 2 部グラフというわけではなく**一般のグラフとする。**$q(G)$ でグラフ $G$ の奇成分 (連結成分の中で個数が奇数の成分) の個数を表す。このとき $G$ が 1–因子を持てば任意の $S \subseteq V$ に対し $q(G-S) \leqq |S|$ が分かる。この条件は十分条件になっている事が分かる。次が成立する。

**定理 3.6** [Tutte **の定理** 1947] $G$ が 1–因子を持つ $\iff \quad \forall S \subseteq V\ ;\ q(G-S) \leqq |S|$

　証明はしないが次の定理を紹介しておく。この様な type の定理を**構造定理**と呼ぶことがある。

**定理 3.7** [Gallai–Edmonds **のマッチング定理**] 任意のグラフ $G$ は次の性質を持つ頂点の集合 $S$ を持つ。
(1) $S$ は $G$ に「マッチ可能」
(2) $G-S$ のすべての連結成分は「因子臨界的」

　定理に出てきた用語を定義しておく。新しいグラフ $H_S = (V_S, E_S)$ を次の様に定義する。$T = \{C \mid\ C$ は $G-S$ の連結成分$\}$ とし，$V_S = S \cup T$ とする。また $E_S$ は次の形の辺 $\ell$ からなる集合とする。$\ell$ は $s \in S$ と $C \in T$ を結ぶ辺，ただし $G$ において $s$ と $C$ の頂点を結ぶ辺が存在するときのみ結ぶ。このグラフ $H_S$ が $S$ のマッチングを含んでいるとき $S$ は $G$ に「**マッチ可能**」という。$G$ の任意の頂点 $v$ に対し $G-v$ が 1–因子を持つとき $G$ は「**因子臨界的**」という。

　この定理の $S$ が求まるとすべての最大マッチングを次の様に求める事ができる。一般にマッチング $M$ に対し $M$ の辺で端点の少なくとも一方が $S$ に属しているものの個数を $k_S = k_S(M)$，両端点が $G-S$ に属しているものの個数を $\ell_S = \ell_S(M)$ とすると $k_S + \ell_S = |M|$ が成立している。また

$$k_S \leqq |S| \qquad \ell_S \leqq \frac{1}{2}(|V| - |S| - q(G-S))$$

が成立している。上の式で等号が成立しているようなマッチングを持つが，これは最大マッチングである。逆に等号を満たすマッチングは最大マッチングである。よって任意の最大マッチングは次の様に得られる。

(1)$H_S$ における最大マッチングを 1 つ選ぶ。
(2) そのマッチングの各辺に対応して $G$ の辺を選ぶ。辺が $s \in S$ と $C \in T$ を結ぶものなら，$C$ の

頂点 $v$ で $sv \in E$ となるものを選び，$e = sv$ を対応する辺としする。
(3)$G - S$ の各成分に対し (2) で選んだ頂点 $v$ を除いて 1–因子を選ぶ。

**疑問**：$G$ が 2 部グラブのとき $S$ はいかなるものか?

Tutte の定理から次が出てくる。

**命題 3.8** [Tutte **の定理の一般化**]
$G$ が $2k$ 個からなるマッチングを持つ $\iff$ $\forall S \subseteq V \ ; \ q(G-S) \leqq |S| + |G| - 2k$