グラフ理論要綱 #2

2003–6–12　　河野

定理 3.6 の証明：　($\Longrightarrow$) は明らか。(そうでない人は自分で確かめて下さい。奇成分に S の点を対応させる 1 対 1 写像を作れます。($\Longleftarrow$) が問題です。対偶『G が 1–因子を持たない $\Longrightarrow$ $\exists S \subseteq V\,;\, q(G-S) > |S|$』を示す。

(1) この命題を**極大な**グラフ G についてのみ示せばよい。ここで G が極大とは $\forall G'\,;\, G=(V,E) \subseteq G'=(V,E')$ に対し G' が 1–因子を持たなければ $G=G'$ が成立する事をいう。

$G=(V,E)$ が極大でなければ $\exists G'=(V,E')$ で $G \subset G'$ で G' も 1–因子を持たないものが存在する。極大なグラフについて命題が成立しているとする。このとき $\exists S \subseteq V\,;\, q(G'-S) > |S|$ である。$G'-S$ の連結成分が $G-S$ の連結成分の何個かの和である事と $G'-S$ の奇成分が $G-S$ の奇成分を 1 個は含むことから $q(G-S) \geqq q(G'-S)$ となるので，G に対しても命題が成立する。

極大な G に対し $S = \{v \mid\ v$ は他のすべての点と隣接している$\}$ と定義する。

(2) $S=V$ のとき命題は成立する。

このとき $G \cong K_n$(完全グラフ) である。n が偶数なら 1–因子を持つので n は奇数である。このときは $S_0=\emptyset$ とすると，$q(G-S_0)=q(G)=1>0=|S_0|$ となり OK。

よって $G-S$ は空グラフでないとしてよい。このとき次の (A)，(B) の 2 つの場合に分ける ; (A) $G-S$ の連結成分はすべて完全グラフ，(B) $G-S$ のある連結成分は完全グラフでない。

(3) (A) のときは命題が成立する。

もし S が $q(G-S) \leqq |S|$ の条件を満たしているとする。$G-S$ の各奇成分 C に対し S の元 $s(C)$ を 1 つ，対応させ，$C \neq C'$ なら $s(C) \neq s(C')$ とできる。各奇成分 C に対し C の元 $t(C)$ を 1 つ選んでおく。$e_C = s(C)t(C)$ は G の辺である。$G-t(C)$ は完全グラフなので 1–因子を持つ。$G-S$ の偶成分はそれ自身 1–因子を持つ。それぞれの 1–因子と e_C すべてをあわせると G の 1–因子となる。これは矛盾なので $q(G-S) > |S|$ が成立している。

(B) の場合も命題が成立する (というか矛盾が生じこの場合は起こらない) 事を示します。唐突ですが次が成立します。

(4) $ab, bc \in E$ かつ $ac, bd \notin E$ となる頂点 a,b,c,d が存在する。

$G-S$ のある成分で完全グラフでないものが存在するので a, a' をその成分の元で $aa' \notin E$ となるものとする。連結成分は連結なので a と a' を結ぶ最短の道を P とし，その最初の 3 個の頂点を a,b,c とする。($a'=c$ となる可能性はあるが $a'=b$ となる事はない。) $ac \in E$ なら P が最短の道ではなくなるので $ac \notin E$ である。また $b \notin S$ なので $\exists d \in V\,;\, bd \notin E$ となる。

いよいよ最後ですネ。G の極大性をここで使います。$G+ac$ は 1–因子 M_1 を持ち，また $G+bd$ は 1–因子 M_2 を持ちます。d から出発して次のルールで道 P を作って行く。M_1 は $G+ac$ の 1–因子なので d を頂点にもつ辺 e_1 を含む。e_1 の d でない頂点を v_1 とする。v_1 を頂点に持つ辺 e_2 が M_2 内に存在すればそれを選択する。そして e_2 の v_1 でない頂点を v_2 とする。以下 M_1 と M_2 を交

互にたどって選択していく。P を伸ばせるだけ伸ばし，$P := de_1v_1e_2\cdots e_nv_n$ とする。P が延長できないのは次の 2 つの場合；(a) $v_n = b$，(b) $v_n = a$ または $v_n = c$。

(a) の場合，$e_n \in M_1$ である。$e_{n+1} = bd$ とし，$C = Pe_{n+1}d$ とおくと C は偶サイクルである。(b) の場合，$e_n \in M_2$ である。$e_{n+1} = v_nb$, $v_{n+1} = b$, $e_{n+2} = bd$ とし，$C = Pe_{n+1}v_{n+1}e_{n+1}d$ とおくと C は偶サイクルである。いずれの場合も $M = (M_2 - C) \cup (C - M_2)$ とすると M が G の 1–因子になり矛盾，この場合は起こらない (極大なグラフは $G - S$ の連結成分がすべて完全グラフになる) 事が分かります。