グラフ理論要綱 #3

2003–6–23　河野

4 連結性

どのような頂点の集合や辺の集合がグラフ G を分離するかという問題から連結度が定義される。まず定義から始める。

グラフ $G = (V, E)$ と頂点の集合 A, B を考える。頂点または辺からなる集合 X が次を満たすとき，X は G において A と B を**分離する**という；任意の A–B 道が X に属する頂点または辺を含む。X が G において $G - X$ の 2 個の頂点を分離するとき X **は** G **を分離する**という。$X = \{v\}$ のときその頂点 v を**切断点**，$X = \{e\}$ のときその辺 e を**橋**という。

$G = (V, E)$ が次の条件を満たすとき k–**連結**であるという；(1) $|G| > k$ かつ (2) $|X| < k$ を満たす任意の $X \subseteq V$ に対し $G - X$ が連結。G が k–連結となる最大の k を G の**連結度**といい，$\kappa(G)$ で表す。

あまり扱わないが辺連結度も定義しておこう。$|G| > 1$ であるグラフ $G = (V, E)$ が次の条件を満たすとき ℓ–**辺連結**であるという；$|Y| < \ell$ を満たす任意の $Y \subseteq E$ に対し $G - Y$ が連結。G が ℓ–辺連結となる最大の ℓ を G の**辺連結度**といい，$\lambda(G)$ で表す。

G が 1–連結である必要十分条件はそれが自明でない連結なグラフである事である。G が 2–連結である必要十分条件は 3 点以上を含み任意の頂点に対しそれを含むサイクルが存在する事である。

演習問題 4.1　グラフ G に対し $\kappa(G) \leqq \lambda(G) \leqq \delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V\}$

演習問題 4.2　グラフ G で $\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G)$ となるものをあげよ。

演習問題 4.3　6 頂点グラフで連結度が 1〜5 のものをそれぞれあげよ。

演習問題 4.4　$\delta(G) \geqq |G| - 2$ ならば $\kappa(G) = \delta(G)$ を示せ。また $\delta(G) = |G| - 3$ かつ $\kappa(G) < \delta(G)$ となるグラフの例をあげよ。

演習問題 4.5　3–正則グラフ G に対して $\kappa(G) = \lambda(G)$ が成立する事を示せ。

3–連結である必要十分条件はこれらほど簡単ではない。グラフ $G = (V, E)$ とその辺 $E \in E$ に対し，e を 1 点につぶして得られるグラフ G/e を G の**縮約**という。即ち $e = xy$ とするとき，v_e を新しい頂点とし，$V' = (V - \{x, y\}) \cup v_e$，$E' = \{vw \in E \mid \{v, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset\} \cup \{v_e w \mid xw \in E - \{e\}$ または $yw \in E - \{e\}\}$ とするとき $G/e = (V', E')$ と定義する。次の定理が成立する。

定理 4.1 グラフ G が 3–連結である必要十分条件は次を満たすグラフの列 $G_0, G_1, \ldots, G_n$ が存在する事である。
(1) $G_0 = K_4, G_n = G$
(2) G_{i+1} は $\deg(x), \deg(y) \geqq 3$ となる頂点 x, y を持ち $G_i = G_{i+1}/xy$ となっている。

即ち 3–連結なグラフは完全グラフ K_4 を出発点にして縮約の逆を繰り返す事により得られる。それが具体的にどのようなグラフかはよく分からないが,「すべてを列挙せよ」と言われると，頂点の数の少ない方から列挙する事はできる。ただし頂点の数が少し大きくなれば現実的に実行可能ではなくなる。

定理 4.2 [Menger **の定理大域版**] グラフが k–連結である必要十分条件は任意の 2 頂点に対しそれを結ぶ k 本の独立な辺が存在する事である。

グラフが k–辺連結である必要十分条件は任意の 2 頂点を結ぶ k 本の辺素な道が存在する事である。

ただし 2 つの道が**独立**とは内点で交わらない事をいう。**辺素**とは 2 つの辺が共通辺を持たない事をいう。

この定理を示すためには次の定理 (これも Menger の定理と呼ばれる) を示せばよい。この定理はグラフ理論の礎石の 1 つである。

定理 4.3 $G=(V,E)$ をグラフ，$A,B\subseteq V$ とする。G において A と B を分離する頂点の個数の最小値は G のなかのお互いに交わらない A–B 道の本数に等しい。

定理 4.3 を証明する前に定理 4.3 から定理 4.2 が従う事を示す。

任意の 2 点に対しそれを結ぶ k 本の独立な道が存在するとき，それを分離するためには少なくとも k 個の点が必要である。よってグラフは k–連結である。逆にグラフ G が k–連結とする。k 個の独立な道で結べない G の頂点 a,b が存在すると仮定して矛盾を導く。2 つの場合に分ける ; 1) a,b をつなぐ辺が存在しない。2) a,b をつなぐ辺が存在する。最初に 1) の場合を考える。$A=N(a)$, $B=N(b)$ と置くと，$|A|\geqq k,|B|\geqq k$ が成立している。定理 4.3 よりお互いに交わらない k–本の A–B 道が存在する。このとき k 本の独立な a–b 道が存在して矛盾。よって 2) a,b をつなぐ辺 e が存在する。$G'=G-e$ と置く。$A'=N_{G'}(a),B'=N_{G'}(b)$ と置く。互いに交わらない A'–B' 道が G' $k-1$ 本存在すると，独立な a–b 道が G に k 本存在するので，互いに交わらない A'–B' 道は高々$k-2$ 本である。よって定理 4.3 より $k-1$ 個の点からなる集合 X によって a と b は G' のなかで分離されている。$|G|>k$ なので G には X,a,b 以外の点 v が存在する。v が $G'=X$ で a と同じ連結成分にあるときは $Y=X\cup\{a\}$ b と同じ連結成分にあるときは $Y=X\cup\{b\}$ とおく。このとき $|Y|=k-1$ で Y は 2 点 v 及び a または b を分離しているので矛盾。

辺連結の場合は G の辺グラフ $L(G)$ に定理 4.3 を適用すればよい。ただし G の**辺グラフ**とは $L(G)$ とは，頂点として G の辺をとり，2 つの辺が G で隣接しているとき $L(G)$ では辺で結んでできるグラフである。もう少し形式的に書くと $G=(V,E)$ に対し $E'=\{ef|\ \ e,f\in E,e$ と f は共通の端点を持つ$\}$ とするとき，$L(G)=(E,E')$ と定義する。 ∎

定理 4.3 を証明する。G,A,B が与えられたとき $k=k(G,A,B)$ によって A と B を分離する頂点の個数の最小値を表す。このとき定理より少し強い次の形の命題を示す。

> $\mathcal{P}$ を G のなかの互いに交わらない k 本未満の A–B 道の集合とする。このとき $|\mathcal{P}|+1$ 個の互いに交わらない A–B 道からなる集合 $\mathcal{Q}$ で，その道の端点の集合が $\mathcal{P}$ に属する道の端点の集合を含むものが存在する。

この命題を G,A は固定し $|G-B|$ についての帰納法で示す。帰納法ではこの様に強い命題の方が証明しやすい場合もある。

定理 4.3 の略証 $|G-B|=0$ のとき命題は成立 (何故?)。$|G-B'|<n$ となるすべての B' に対し命題の成立を仮定して，$|G-B|=n$ となる B について証明する。R を A–B 道で $\mathcal{P}$ の道の頂点になっている B の頂点を通らない道とする (何故この様な道が存在するか?)。この R が $\mathcal{P}$ の各道と交わらなければ $\mathcal{P}\cup\{\mathrm{R}\}$ が求めるもの。よって $\mathcal{P}$ の道と交わるので，この交点のうち最後のものを x とし，x を通る $\mathcal{P}$ の道を P とする。$B'=B\cup V(xP\cup xR)$ とする。ここで xP は道 P の頂点 x 以降の部分，$V(X)$ は X の頂点を意味する。このとき $k(G,A,B')\geqq k(G,A,B)$, $|G-B'|<|G-B|$ が成立する。$\mathcal{P}'=(\mathcal{P}-\{P\})\cup Px$ とすると，帰納法の仮定が使えて $|\mathcal{P}_1|=|\mathcal{P}|+1$ となる $\mathcal{P}_1$ が存在するのでこれを用いて $\mathcal{Q}$ を作れる。 ∎

定理 4.3 から定理 3.2 が従う。

グラフを通信ネットワークと考えると連結度はそのネットワークの安全度と考えられる。この問題について少し考える。そのために重み付グラフを定義しておく。グラフ $G=(V,E)$ と辺から実数への写像 $w:E\to \boldsymbol{R}$ の組 (G,w) を**重み付グラフ**という。通常関数値は $w(e)>0$ を仮定する。w の意味は問題により異なる ; ネットワーク建設の費用，ネットワークの長さ，移動費用 (巡回セールスマン問題) 等。問題は次の様に定式化される。

問題： 重み付グラフ (G,w) と自然数 k が与えられたとき，G の k–連結全域部分グラフ H で最小の重みのものを見つけよ。

ここで部分グラフ H の重み $w(H)$ は $w(H)=\displaystyle\sum_{e\in E(H)} w(e)$ で定義される。最小の重みとは条件を満たす部分グラフのなかで最小を意味する。と，問題の定式化をしたのはいいが，これについてあまり知られていない。2 つの特別な場合についてのみふれておく。

最初は $k=1$ の場合。最小の重みを持つ 1–連結全域部分グラフは全域木である (何故か?)。最小の重みを持つ 1–連結全域部分木は**最適木**と呼ばれており，最適木を求めるクルスカル (Kruskal) のアルゴリズム (1956) が知られている。

Kruskal **のアルゴリズム**

(1) 重みが最小の辺 e_1 を選べ。

(2) 辺 $e_1,\ldots,e_k$ が選ばれているとき，e_{k+1} を次の様に選べ。

　1) $G[e_1,\ldots,e_{k+1}]$ はサイクルを持たない。

　2) $w(e_{k+1})$ は 1) を満たす中で最小。

(3) step (2) が実行できなくなったら終わり。

命題 4.4 Kruskal のアルゴリズムで得られる木は最適木である。

演習問題 4.6　命題 4.4 を証明せよ。

次に $G=K_n$ で重さがすべて 1 である場合を扱う。重さが最小の全域部分グラフは今の場合辺の数が最小の全域部分グラフである。H を k–連結グラフとすると，$k=\kappa(H)\leqq\delta(H)\leqq\dfrac{2\|H\|}{|H|}$ が成立するので辺の数 $\|H\|$ は $\dfrac{k|H|}{2}$ 以上である。K_n に含まれる k–連結全域部分グラフの中で辺の個数が最小のグラフの辺の数を $f(k,n)$ とすると，$f(k,n)\geqq\left\lfloor\dfrac{kn}{2}\right\rfloor$ が分かる。

自然数 k,n に対し次の様にグラフ $H_{k,n}$ を定める。H の頂点は $V=\{0,1,\ldots,n-1\}$ とする。$i,j\in V$ に対し i と j の距離 $d(i,j)$ を $d(i,j)=\min\{|i-j|,|i-j+n|,|i-j-n|\}$ と定義する。

(1) k が偶数のときは $k=2r$ と置く。このときは頂点 i,j が $d(i,j)\leqq r$ のとき i と j の間に辺 $e_{ij}=ij$ を引く。

(2) k が奇数で n が偶数のときは $k=2r+1$ と置く。$H_{2r+1,n}$ は $H_{2r,n}$ に辺 f_i $(i=1,2,\ldots,\dfrac{n}{2})$ を付け加えて得られるグラフとする。ただし辺 f_i は頂点 i と頂点 $i+\dfrac{n}{2}$ を結ぶ辺とする。

(3) k，n ともに奇数のときは $k=2r+1$ と置く。$H_{2r+1,n}$ は $H_{2r,n}$ に次の辺を付け加えて得られるグラフとする。付け加える辺は 0 と $\dfrac{n-1}{2}$ をつなぐ辺，0 と $\dfrac{n+1}{2}$ をつなぐ辺, 及び i と $i+\dfrac{n+1}{2}$

$(i = 1, \ldots, \dfrac{n-1}{2})$ をつなぐ辺。このとき次が成立するので $f(k,n) = \left\lfloor \dfrac{kn}{2} \right\rfloor$ が分かる。

命題 4.5 $H_{k,n}$ は k–連結である。

証明 $k = 2r$ の場合のみ示し後は演習問題とする。k–連結でないと仮定すると，切断集合 V' で $|V'| < 2r$ となるものが存在する。i, j を $H_{k,n} - V'$ の異なる成分に属する頂点とする。$S = \{i, i+1, \ldots, j-1, j\}$, $T = \{j, j+1, \ldots, i-1, i\}$ とする。ただし和は $\bmod n$ で考えている。$|V'| < 2r$ なので $|S \cap V'| < r$ または $|T \cap V'| < r$ が成立している。$|S \cap V'| < r$ と仮定しても一般性を失わない。このとき i から始まって j で終わる数列で，隣り合う項の差が高々r であるものが存在するが，これは $H_{k,n} - V'$ の i–j 道を与えるが，これは矛盾である。 ∎

演習問題 4.7 k が奇数のときも $H_{k,n}$ が k–連結になる事を示せ。

K_n に含まれる $f(k,n)$ 個の辺を持つ k–連結グラフは $H_{k,n}$ の形をしたものに限るわけではない。次を考えよ。

演習問題 4.8 K_9 の部分グラフで 5–連結であるが $H_{5,9}$ と同型でないグラフを見つけよ。($f(5,9) = 23$ だから辺の数は 23 本です。)