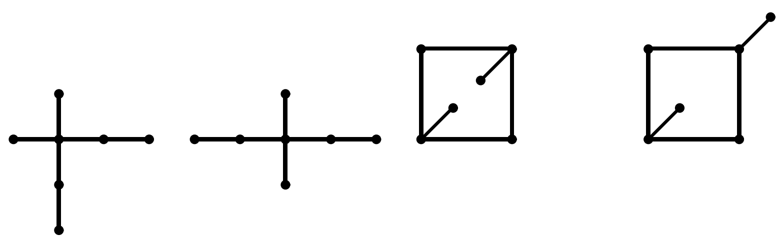
グラフ理論要綱 #4	2003–6–19	河野

5　平面グラフ

ここではグラフは幾何的対象と考え再定義する。グラフ $G = (V, E)$ と書いたとき次の様に定義される 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の図形 $G = V \cup E$ の事と考える。V の頂点は 3 次元ユークリッド空間内の互いに交わらない点を意味する。辺 $e \in E$ は 3 次元ユークリッド空間内の**単純曲線**とする。ここで単純曲線 C とは，$f : [a, b] \to \boldsymbol{R}^3$ を閉区間から 3 次元ユークリッド空間への ある一対一連続写像に対し $C = f([a, b])$ となっているものである。そのとき単純曲線 C の**端点**とは点 $f(a), f(b)$ を意味する。辺 $e \in E$ の端点は V の頂点になっているものとする。辺である単純曲線は端点以外では交わらないものとする。$G = (V, E)$ と書くが幾何学的には $G = V \cup E = E$ で頂点集合 V が指定されているものと考えられる。

この意味でグラフ $G = (V, E), G' = (V', E')$ が与えられているとき，G と G' が同型であるとは G から G' の上への一対一写像 f で V の元と V' の元の間の対応を与えるものが存在する事を意味する。この意味での同型をこの節では $G \simeq G'$ と書く事にする。

グラフ G が**平面的**であるとは，G から平面 $\boldsymbol{R}^2$ への一対一写像が存在する事をいう。この写像による像 $f(G)$ もグラフになるが，この様に実際に平面に埋め込まれたグラフを**平面グラフ**という。2 つの平面グラフ G, G' に対しある平面上の同相写像(1) F が存在して $F(G) = G'$ となるとき，G と G' は**平面グラフとして同型**といい $G \cong G'$ と書く。$G \cong G'$ なら $G \simeq G'$ だが逆は正しくない。次はグラフとしては同型だが平面グラフとしては同型でない例。



定義しておいてすぐ変更するのも何だが，平面への埋め込みはどの面を有界でない面にとるかで，平面グラフとして同型でないものが取れるので平面ではなく球面への埋め込みと考えた方がよい。球面へ埋め込まれグラフ G, G' について球面上の同相写像 F が存在して $F(G) = G'$ となるとき，G と G' は**球面グラフとして同型**といい $G \cong G'$ と書く。平面グラフに関しては $\pi : \boldsymbol{R}^2 \to S^2$ を $\pi(x, y) = \left(\dfrac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \dfrac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right)$ とおくとき，$\pi(G)$ と $\pi(G')$ が球面グラフとして同型のとき G と G' は**平面グラフとして同型**と新たに定義する。

G を平面グラフとするとき，$\boldsymbol{R}^2 - G$ の各連結成分を G の**面**という。平面グラフの頂点・辺・面の数の間には次の関係がある。

定理 5.1 [Euler **の定理**] G を連結なグラフとし，頂点の数を p，辺の数を q，面の数を r とするとき $p - q + r = 2$ が成立する。

命題 5.2 $T = (V, E)$ をグラフとし，頂点の個数を p，辺の個数を q とするとき，T が木である必要十分条件は $p - q = 1$ である。

(1) 平面から平面への上への一対一連続写像を意味する。

証明　p についての帰納法で示す。$p=1$ のときは $q=0$ しかありえない。このときグラフは木である。p より小さいとき成立を仮定する。$T=(V,E)$ には葉 (次数 1 の頂点) が存在する。その点を v とし，v に接続する辺を e とする。このとき $T'=(V-\{v\},E-\{e\})$ も木である。帰納法の仮定から，$(p-1)-(q-1)=1$, よって $p-q=1$ が成立する。

逆に $p-q=1$ とする。$\displaystyle\sum_{v\in V}\deg(v)=2q=2(p-1)$ である。すべての頂点の次数が 2 以上なら $\displaystyle\sum_{v\in V}\deg(v)\geqq 2p$ となるので次数 1 の頂点 v が存在する。その点を v とし，v に接続する辺を e とする。このとき $T'=(V-\{v\},E-\{e\})$ は $(p-1)-(q-1)=1$ を満たしている。帰納法の仮定から，T' は木である。よって T も木である。 ∎

定理 5.1 は命題 5.2 を出発点とする q に関する帰納法で証明できる。

定理 5.1 の証明：　p を固定し q についての帰納法で示す。$q<p-1$ のときグラフは連結にならない。よって出発点は $q=p-1$ である。このとき命題 5.2 により $G=(V,E)$ は木である。平面上の木は平面を 2 つ以上に分割しない。よって面の数は 1 である。このとき $p-q+r=2$ が成立する。

$q\geqq p$ のとき，命題 5.2 により G は木ではない。よってサイクル C とその上の辺 e が存在する。e を境界とする面は 2 つ存在する。即ち e を境界とする面を X_1,X_2 とすると，$X_1\neq X_2$ である。$G'=G-e$ とすると，G' は連結な平面グラフで $|G'|=p,\|G'\|=q-1$ である。面は G の面 X_1,X_2 以外は同じで X_1 と X_2 が同じ面 X になっている。よって G' の面の数は $r-1$ である。帰納法の仮定より $p-(q-1)+(r-1)=2$ が成立するので，$p-q+r=2$ が成立する。 ∎

定理の証明の途中で次の定理を断わらずに用いている。この定理は当り前の様に見えるがきちんと証明しようとすると難しい。

ジョルダンの閉曲線定理：平面上の単純閉曲線は平面を 2 つに分割する。

定理 5.1 から次が従う。オリジナルの証明はユークリッドの「原論」(今から 2 千数百年前の本) に書かれており，角度の議論を行っている。この証明は「組合せ」的な議論のみで構成されている。

定理 5.3 正多面体は 5 種類しかない。

証明　正多面体の各面が m 角形で，各頂点に n 個辺が集まっているとする。正多面体の頂点と辺からなるグラフは平面的である。よって頂点の数を p，辺の数を q，面の数を r とすると $p-q+r=2$ が成立している。m 角形より $mr=2q$ が成立。頂点の周りの状況より $np=2q$ が成立。よって $p-q+r=2$ に代入すると $q(\frac{2}{n}+\frac{2}{m}-1)=2$ が成立する。よって $\frac{2}{n}+\frac{2}{m}-1>0$ が成立する。また $m\geqq 3$ より $n\leqq 5$，$n\geqq 3$ より $m\leqq 5$ が成立する。よって可能性は $(m,n)=(5,3),(4,3),(3,5),(3,4),(3,3)$ の 5 種類である。それぞれの場合 $(p,q,r)=(20,30,12),(8,12,6),(12,30,20),(6,12,8),(4,6,4)$ である。 ∎

演習問題 5.1　グラフが連結でない場合に定理 5.1 を拡張せよ。(hint：連結でないグラフ (例えば連結成分が 2 個のグラフと 3 個のグラフ) の例を計算して結果を予想し，それを証明せよ。)

グラフとして同型でも平面グラフとして同型でない例が存在した。しかしある種の条件を付けるとその様な例はない事が分かる。先に上げた例はパタパタできる，即ち連結度か低いグラフであった。連結度を上げるとこの様な例は作れなくなり次が成立する。

定理 5.4 [Whitney **の定理**] G を 3–連結グラフとする。2 次元球面への 2 つの埋め込み $f:G\to S^2$, $g:G\to S^2$ に対し球面上の同相写像 $F:S^2\to S^2$ で $F\circ f=g$ となるものが存在する。

そのために次の 2 つの命題を示す。

命題 5.5 2–連結平面グラフにおいてはどの面もその境界はサイクルである。

命題 5.6 3–連結平面グラフにおいてサイクルが面の境界になる必要十分条件はそのサイクルが非分離的な誘導サイクルである事である。ここで誘導サイクルとは弦 (閉路上の隣接しない 2 点を結ぶ辺) を持たないサイクルの事。

命題 5.5 の証明： 2–連結平面グラフを G とする。2–連結より 2–辺連結なので，任意の辺 e に対し $G-e$ は連結である。面 X の境界上にある辺 e を考える。辺 e の一方が面 X であり，他の一方は他の面になっている。よって面の境界はサイクルである。∎

命題 5.6 の証明： C を非分離的な誘導サイクルとする。C は平面を 2 つの部分に分離するが両方の領域に G の他の点を含むことはない。点を含まない方の面を X とすると，$\partial X = C$ となっている。

逆に C がある面 X の境界になっているとする。このとき C が非分離的であることは見やすい。C が弦 $e = xy$ を持つとする。このとき x, y は C を 2 つの道 P_1, P_2 に分離する。P_1 の頂点が x, y のみなら多重辺をもつので P_1 は内点 v を持つ。同様に P_2 は内点 w を持つ。C 内を通る x から出発して y へいたる単純曲線 ℓ が存在する。$e \cup \ell$ はグラフ上のサイクルではないが，平面上の単純閉曲線なので平面を 2 つの部分に分離する。一方の領域は v を含み他方の領域は w を含むが，これは $G - \{x, y\}$ が非連結である事を意味する。これは矛盾。∎

この 2 つの命題から Whitney の定理がすぐ従うように見えるが次の 2 つの定理を必要とする。見かけは簡単そうに見えるが，それぞれ位相幾何学の大定理である。

Schoenflies **の定理**: S^2 上で単純閉曲線が分ける領域は円板と同相である。

円板定理: D を円板として ∂D をその境界とする。∂D 上の任意の写像 $f : \partial D \to \partial D$ に対し D への拡張 $F : D \to D$ が存在する。ここで拡張とは $F|_{\partial D} = f$ となる写像の事。

定理 5.4 の証明： G を平面的グラフとし $f : G \to S^2$，$g : G \to S^2$ を G の球面への埋め込みとするとき，$H = g \circ f^{-1}|_{f(G)} : f(G) \to S^2$ とおく。H の拡張 F で F が S^2 上の同相写像になるものが存在すれば証明は終る。H の拡張 F とは $F|_{f(G)} = H$ を満たす S^2 上の写像の事。$f(G)$ の各面の境界 C は命題 5.5 より円周と同相であるが，命題 5.6 により非分離誘導サイクルである。面を X とすると X は円盤と同相であり，$\partial X = C$ となっている。$H(C)$ は $g(G)$ の非分離誘導サイクルなので $g(G)$ のある面 Y の境界になっている。このとき $H|_C : C \to H(C)$ の拡張 $F_X : X \to Y$ で F_X が X から Y への同相写像になっているものが存在する。すべての面に関して拡張を実行すれば目的の同相写像が得られる。∎

次に平面グラフを特徴づける Kuratowski の定理を紹介する。この定理はグラフ理論中のグラフ理論と言える「グラフマイナー」を生み出す元となった定理でもある。紹介のためにグラフマイナーの定義が必要である。

グラフ $G = (V, E)$ とグラフ $X = (V', E')$ が次の関係にあるとき「G は MX である」いう ; $\{V_x \mid \ x \in V'\}$ は V の分割であり，1) $\forall x \in V'$ に対し $G[V_x]$ は連結，2) $\forall x, y \in V'$; G に V_x–V_y 辺が存在する事と $xy \in E'$ となる事が必要十分である。このときこの定義と縮約とに次の関係がある。

命題 5.7 G が MX である必要十分条件は X が G の辺の縮約を繰り返して得られる事である。

X が Y の**マイナー**であるとは，Y の部分グラフ G で G が MX となる様なものが存在する事と定義する。このとき $X \preceq Y$ と書く。

命題 5.8 $X \preceq Y$ である必要十分条件はグラフの列 $G_1, G_2, \ldots, G_n$ で次の 1),2) を満たすものが存在してする事である；1) $X = G_1$, $Y = G_n$，2) $G_i \subseteq G_{i+1}$ または G_{i+1} は MG_i である。

G が MX であって，各分割 V_x が誘導する部分グラフ $G[V_x]$ が次の条件を満たすとき G は X の**細分**と呼び G は TX であるという；$G[V_x]$ の各頂点の次数は 1 点を除いて 1 または 2 であり，次数 2 の点は V_x–V_y 辺の端点にならない。マイナーの定義において MX の部分を TX で置き換えたものを**位相マイナー**と呼ぶ。

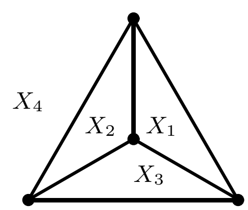
命題 5.9 $X \preceq Y$ のとき Y が平面的なら X は平面的である。対偶をとると，X が非平面的なら Y は非平面的である。

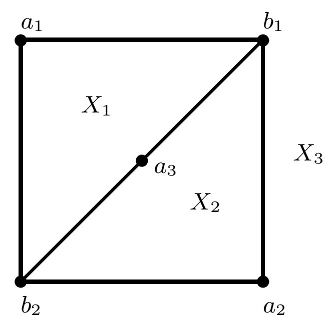
命題 5.10 K_5 及び $K_{3,3}$ は平面的でない。

命題 5.10 は幾何的な証明もあるが，定理 5.1 から次の命題を経由して証明してもよい。

命題 5.10 の証明： K_5 が平面的と仮定し，平面グラフ K_5 を考える。3 頂点 v_1, v_2, v_3 は 3 角形をなし平面を 2 つの部分に分離している。頂点 v_4 は有界な部分にあると仮定しても一般性を失わない。このとき 4 つの頂点は左図の様になっているが，5 番目の頂点 v_5 が $X_1, \ldots, X_4$ のどの部分あっても，平面上で他のすべての点と結ぶ事ができない。これは平面性に矛盾。

$K_{3,3}$ も同様に平面グラフと仮定すると，4 頂点のなす 4 角形が平面を 2 つの部分に分けるが，5 番目の頂点は有界な部分にあるとする。このとき右図の様になっているとしてよいが，頂点 b_3 が X_1, X_2, X_3 のいずれにあってもすべての a_i と結ぶ事ができない。■





命題 5.11 平面グラフ G に対し $\|G\| \leqq 3|G| - 6$ が成立する。3–サイクルを持たない平面グラフに対して $\|G\| \leqq 2|G| - 4$ が成立する。

証明 平面グラフ G の面で 3 角形でないものが存在するとき，対角線を加える事により各面が 3 角形で頂点の数は G と同じで辺の数は G 以上のグラフ G' が存在する (G' が多重グラフにならないよう**注意**!)。G' に対し $\|G'\| = 3|G'| - 6$ を示せば，$\|G\| \leqq \|G'\| = 3|G'| - 6 = 3|G| - 6$ となり命題が示される。G' の頂点，辺，面の数をそれぞれ p, q, r とすると，面がすべて 3 角形より $3r = 2q$ が成立する。これをオイラーの公式に代入すると $2 = p - q + r = p - q + \dfrac{2}{3}q = p - \dfrac{1}{3}q$ なので OK。

3–サイクルを持たないグラフ G の面で 4 角形でないものが存在するとき，対角線を加える事により各面が 4 角形で頂点の数は G と同じで辺の数は G 以上のグラフ G' が存在する (G' が多重グラフにならないよう**注意**!)。G' に対し $\|G'\| = 2|G'| - 4$ を示せば，$\|G\| \leqq \|G'\| = 2|G'| - 4 = 2|G| - 4$ となり命題が示される。G' の頂点，辺，面の数をそれぞれ p, q, r とすると，面がすべて 4 角形より $4r = 2q$ が成立する。これをオイラーの公式に代入すると $2 = p - q + r = p - q + \dfrac{1}{2}q = p - \dfrac{1}{2}q$ なので OK。■

命題 5.9 と命題 5.10 よりグラフ G が平面的なら K_5 及び $K_{3,3}$ をマイナーに持たない事が分かる。Kuratowski(クラトフスキー) の定理はこの逆が成立することを主張する。

定理 5.12 グラフ G に対して次は同値である。
(1) G は平面的
(2) G は K_5 と $K_{3,3}$ をマイナーとして持たない。
(3) G は K_5 と $K_{3,3}$ を位相マイナーとして持たない。

補題 1 G が MX とする。$\Delta(X) = \min\{\deg(v) \mid v \in V(X)\} \leqq 3$ のとき G のある部分グラフ H で H が TX になるものが存在する。

証明 $\{V_x \mid x \in V(X)\}$ を MX が与える分割とする。このとき H を次の様に構成する。X の各辺に対応する G の辺を 1 つ選ぶ。各 V_x に対し選んだ辺の端点になっている頂点を $v_1, \ldots, v_k$ とする，ただし $k \leqq 3$ である。次数が $\deg(x)$ の頂点が 1 つ，他の頂点は次数 2 以下で $v_1, \ldots, v_k$ を含む木が構成できれば OK。 ∎

補題 2 G が K_5 または $K_{3,3}$ をマイナーに持つ事は G が K_5 または $K_{3,3}$ を位相マイナーに持つ事の必要十分条件である。

証明 $(\Longleftarrow)$ は明らか。$(\Longrightarrow)$ を示す。$\Delta(K_{3,3}) \leqq 3$ なので補題 1 より $K_{3,3}$ をマイナーに持てば位相マイナーに持つ。よって G が K_5 をマイナーに持つとき，G は K_5 または $K_{3,3}$ を位相マイナーに持つ事を示す。K を G の部分グラフで MK_5 となるものの中で最小のものとする。$1, \ldots, 5$ を K_5 の頂点とし $V_1, \ldots, V_5$ を MK_5 を表す $V(K)$ の分割とする。K の最小性より 1) 各 V_i は木，2) V_i と V_j を結ぶ辺は唯 1 本である。V_i に対し，他の V_j と結ぶ辺を $e_1, \ldots, e_4$ とすると，$T = K[V_i] \cup e_1 \cup \cdots \cup e_4$ は木であり，葉を 4 つのみ持つ。すべての i について T が $TK_{1,4}$ なら K は TK_5 となるので，ある頂点に対し T は $TK_{1,4}$ でない。このとき T は次数 3 の頂点を 2 つ持つ木になる。このとき K は部分グラフとして $TK_{3,3}$ を持つ。 ∎

補題 3 G が 3–連結で $|G| > 4$ ならば G の辺 e で G/e が 3–連結になるようなものが存在する。

証明 その様な辺が存在しないと仮定して矛盾を導く。任意の $xy \in E$ に対し G/xy は高々2–連結とする。このとき分離集合 S で要素の個数が高々2 個のものが存在する。G の xy に対応する G/xy の頂点を v_{xy} とする。$v_{xy} \notin S$ なら S は G を分離するので $v_{xy} \in S$ である。また $|S| = 1$ なら $S = \{v_{xy}\}$ より $\{x, y\}$ が G を分離する。よって $S = \{v_{xy}, z\}$ となっている。$T = \{x, y, z\}$ とおくと，T は G を分離している。G は 3–連結なので T のどの頂点も $G - T$ の任意の連結成分と隣接している。

$T = \{x, y, z\}$ と $G - T$ の連結成分 C を，$|C|$ があ最小になる様に選んでおく。$zv \in E$ となる $v \in C$ をとり，G/zv で前同様に議論する事により $\{z, v, w\}$ が分離集合になるようにする。$xy \in E$ なので x, y は共に $G - \{z, v, w\}$ のある成分に入っている。それを含まない成分を D とする。(1) D と v は隣接している。また (2) D は x, y, z を含んでいない。また (1) より (3)$D \cap C \neq \emptyset$ である。ゆえに $D \subseteq C$ であるが，$v \notin D$ より $D \subsetneqq C$ となる。これは C の選び方に矛盾する。 ∎

補題 4 K_5 と $K_{3,3}$ を共にマイナーに持たない 3–連結グラフは平面的である。

証明 $|G|$ についての帰納法で示す。$|G| = 4$ のときは $G = K_4$ なので主張は正しい。$|G| > 4$ としてそれより小さいグラフに関しては主張が正しいと仮定する。補題 2 より G/xy が再び 3–連結になる x, y が存在する。このとき G/xy は K_5 及び $K_{3,3}$ をマイナーに持たない。帰納法の仮定より G/xy は平面への埋め込み $\widetilde{G}$ を持つ。F を v_{vy} を含む $\widetilde{G} - v_{vy}$ の面とし，C をその境界とする。$\widetilde{G} - v_{vy}$ は 2–連結なので C はサイクルである。$X = N_G(x) - \{y\}$, $Y = N_G(y) - \{x\}$ と置くと $X \cup Y \subseteq V(C)$ である。$\widetilde{G}' = \widetilde{G} - \{v_{xy}v \mid v \in Y - X\}$ は $G - y$ の埋め込みと思える。そこでは x は v_{xy} によって表されている。$X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ として，頂点 $x_1, \ldots, x_k$ はこの順で C 上に乗っているとしてよい。即ち x_i から x_{i+1} への C 上の道を P_i とおくと，x_i, x_{i+1} 以外の x_j は P_i に含まれない。$\widetilde{G}'$ に付け加え $Y \cup \{y\}$ 及びそれらを結ぶ辺を平面上に描ければ G が平面的になる。Y の元すべての元が 1 つの P_i に乗っていれば条件を満たす。よってそうはなっていないと仮定する。

今「$\exists y_1 \in Y - X$」を仮定する。$y_1 \in P_1$ としても一般性を失わない。このとき Y には y_1 以外の元 y_2 で $y_2 \notin P_1$ となる元が存在する。このとき $\{x, y, x_1, x_2, y_1, y_2\}$ から $TK_{3,3}$ を構成する事ができる。これは矛盾，

よって $Y \subseteq X$ としてよい。$|Y| = |Y \cap X| \geqq 3$ のとき Y から 3 点 y_1, y_2, y_3 を取ってくると $\{y_1, y_2, y_3, x, y\}$ から TK_5 を作る事ができる。よって $|Y| = 2$ である。このとき 2 つの元 y_1, y_2 が同じ P_i に属すと平面図が書けるので $\exists x_i, x_j \in X$ で y_1, y_2 を C 上分離するものが存在する。このとき前と同様に $\{x, y, x_i, x_j, y_1, y_2\}$ から $TK_{3,3}$ を構成する事ができる。 ■

補題 5 G を $\kappa(G) \leqq 2$ であるグラフとする。G_1, G_2 を G の誘導部分集合で，$G = G_1 \cup G_2$ かつ $|G_1 \cap G_2| = \kappa(G)$ をみたすものとする。G が $K_5, K_{3,3}$ を位相マイナーに持たないグラフのなかで辺に関して極大ならば，G_1, G_2 もそうであり，$G_1 \cap G_2 = K_2$ である。

証明 最初に $\kappa(G) = 0$ の場合を考える。$v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$ となる頂点に対し $e = v_1v_2$ とおく。G の極大性より $G + e = G_1 \cup G_2 + e$ は K_5 または $K_{3,3}$ の位相マイナー K を含む。しかし K は 3–連結なので e を辺に含まない。よって $K \subseteq G_1 \cup G_2$ より $K \subseteq G_i (i = 1$ または $2)$。これは矛盾。この場合は起こらない。

次に $\kappa(G) = 1$ の場合を考える。結論的にはこの場合も起こらない。$G_1 \cap G_2 \{v\}$ とする。G_i のなかで v と隣接する頂点を v_i とし，$e = v_1v_2$ とする。$G + e$ は位相マイナー K を含む。G_1, G_2 が共に K の分岐点 (次数が 3 以上の点) を含めば K_5 または $K_{3,3}$ が 2 点で分離されるのでどちらかは分岐点を含まない。今 G_2 が含まないとする。K の道 $v \cdots v_2v_1 \cdots$ の部分を $\cdots vv_1 \cdots$ で置き換えて得られるグラフを K' とすると K' はまた K_5 または $K_{3,3}$ の位相マイナーで $K' \subseteq G_1$ となるので矛盾。

以上から $\kappa(G) = 2$ となる。$S = G_1 \cap G_2 = \{x, y\}$ とする。x, y は $G - S$ の各連結成分と隣接している。最初に $xy \in E$ を示す。$e = xy \notin E$ とする。G の極大性より $G + e$ の部分グラフ K で K_5 または $K_{3,3}$ の位相マイナーであるものが存在する。G_1, G_2 が共に K の分岐点 (次数が 3 以上の点) を含めば K_5 または $K_{3,3}$ が 2 点で分離されるのでどちらかは分岐点を含まない。今 G_2 が含まないとする。よって $K \subseteq G_1 + e$ としてよい。K が x と y をつなぐ G_2 内の道 P を含むときは P を e で置き換えたものを K' とすると $K' \subseteq G_1$ となる。このとき $K' \subseteq G$ となり矛盾。

G_i $(i = 1, 2)$ が極大である事を示す。G_i の結ばれていない 2 頂点をつなぐ辺を e_i とする。$G + e_i$ の部分グラフ K で K_5 または $K_{3,3}$ の位相マイナーであるグラフが存在する。G_1, G_2 が共に K の分岐点 (次数が 3 以上の点) を含めば K_5 または $K_{3,3}$ が 2 点で分離されるのでどちらかは分岐点を含まない。道の置き換えによりどちらかは K を含むと仮定してよい。$G_j (j \neq i)$ が K を含めば矛盾，よって $G_i + e$ は K を含む。 ■

補題 6 $|G| \geqq 4$ であり，G が K_5 と $K_{3,3}$ を位相マイナーに持たないグラフの中で辺に関して極大であれば，G は 3–連結である。

証明 頂点の個数に関する帰納法で示す。$|G| = 4$ のときは $G = K_4$ なので OK。$|G| > 4$ とし，頂点の個数が小さいグラフについて主張が成立する事を仮定する。G が 3–連結でないと仮定する。G を分離する集合 S をとる。グラフ G_1, G_2 で $G = G_1 \cup G_2$ かつ $G_1 \cap G_2 = S$ となるものが存在するので，補題 5 より $S = \{x, y\}$ としてよい。帰納法の仮定より G_1, G_2 は 3–連結なので補題 4 より平面グラフとしてよい。G_i において xy を境界の一部にもつ面を F_i とする。∂F_i には x, y 以外にも頂点が存在するので，これを z_i とする。

極大性の仮定より $G + z_1z_2$ は K_5 または $K_{3,3}$ のマイナーである K を含む。

K の分岐点が一方のみ (今 G_1 とする) に存在するとき，F_1 の中心に頂点 u をとり $G_1' = G_1 + u + ux + uy + uz_1$ を考えるとこれは平面グラフとして実現できる。道の付け替えにより K_5 または $K_{3,3}$ のマイナーである K' を G_1' は含む。これは矛盾。よって分岐点は両方に属している。このグラフ K は 3 点 $\{x, y, z_1\}$ で分離されるので，K_5 の位相マイナーではありえない。よって K は $K_{3,3}$ の位相マイナーである。K の分岐点が 3 点により分離されるとき分岐点は 5 個と 1 個に別れる。今 G_2 に分岐点が 1 個と仮定する。このとき先ほど作った G_1' を考える事により平面グラフののなかに K' を実現でき，矛盾が出てくる。 ■

グラフ G が平面的でなくてもトーラス (ドーナツの表面) に埋め込める場合がある。例えば K_5 や $K_{3,3}$ はトーラスに埋め込める。トーラスを**種数** (*genus*)1 の曲面といい F_1 で表す。2 人乗り浮き輪のような曲面を種数 2 の曲面といい F_2 で表す。一般に n 人乗り浮き輪 (そんなものがあったら) の様な曲面を種数 n の曲面といい F_n で表す。球面を種数 0 の曲面といい F_0 とも書く。グラフ G から F_n への 1 対 1 写像を G の F_n への埋め込みという。

命題 5.13 任意のグラフはある種数の曲面への埋め込みを持つ。

グラフ G に対し埋め込める曲面の種数の最小値をグラフの**種数** (*genus*) といい $g(G)$ で表す。平面グラフ G は $g(G) = 0$ である。$K_5, K_{3,3}$ は平面グラフではないので $g(K_5) = 1, g(K_{3,3}) = 1$ である。

平面グラフのオイラー数の拡張が考えられる。埋め込み $f : G \to F_n$ に対し $F_n - f(G)$ の各面が円板と同相のとき f を**円板埋め込み** (*2–cell embedding*) という。連結なグラフの最小種数の曲面への埋め込みは円板埋め込みである (何故か?)。

定理 5.14 $f : G \to F_n$ を円板埋め込みとする。G の頂点の数を p，辺の数を q，面の数を r とすると $p - q + r = 2 - 2n$ である。

定理 5.15 完全グラフ K_n $(n \geqq 3)$ に対し $g(K_n) = \left\lceil \dfrac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$ が成立する。

定理 5.16 グラフの G に対し $g(G) = n \geqq 1$ とすると $\chi(G) \leqq \left\lceil \dfrac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \right\rceil$ が成立する。

この定理自身は 4 色定理より前に知られていた。この定理に $n = 0$ を代入すると 4 色定理が得られる様な気がするが，勿論勘違いである。