グラフ理論要綱 #5　　2003–6–29　河野

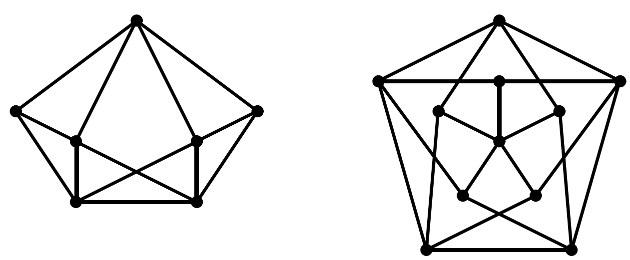
6　彩色数

グラフの頂点に隣接する頂点は同じ色にならないように色を塗る事を頂点彩色または単に彩色といい，グラフの辺に隣接する辺には同じ色にならないように色を塗る事を辺彩色という。頂点・辺の両方に色を塗るという事も考えられるがこの講義では扱わない。

定義 6.1 $G = (V, E)$ をグラフとする。V から $C(k) = \{1, 2, \ldots, k\}$ への写像 $c : V \to C(k)$ で $xy \in E$ のとき $c(x) \neq c(y)$ を満たすものを G の k–**彩色**といい，この様な c が存在するとき G は k–**彩色可能**であるという。この様な k の最小値を G の**彩色数**といい $\chi(G)$ で表す。

E から $C(k) = \{1, 2, \ldots, k\}$ への写像 $c : E \to C(k)$ が隣接する辺 e, e' に対し $c(e) \neq c(e')$ を満たすものを G の k–**辺彩色**といい，この様な c が存在するとき G は k–**辺彩色可能**であるという。この様な k の最小値を G の**辺彩色数**といい $\chi'(G)$ で表す。

演習問題 6.1　次のグラフの彩色数はいくらか。また辺彩色数はいくらか。



彩色数を調べるために臨界という概念を導入する。グラフ G に対し H を G の部分グラフとすると $\chi(H) \leqq \chi(G)$ が成立する。G の任意の**真部分グラフ** ($H \subsetneqq G$) に対し $\chi(H) < \chi(G)$ が成立するとき G は**臨界** (*critical*) であるという。演習問題 6.1 のグラフは臨界である (この事を示せ)。臨界である事を示すには任意の辺 e に対し $\chi(G - e) < G$ を示せばよい。また臨界グラフは連結である (何故か?)。彩色数が k である臨界グラフを k–**臨界グラフ**という。

命題 6.2 任意のグラフ G は臨界部分グラフ H で $\chi(H) = \chi(G)$ となるものを含む。

命題 6.3 G の彩色数 k の臨界部分グラフなら各頂点の次数は少なくとも $k - 1$ である。

この事から次が従う。

系 6.4 任意のグラフ G に対し $\chi(G) \leqq \Delta(G) + 1$，ここで $\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V\}$ である。

$G = (V, E)$ をグラフとする。V の部分集合 V' が任意の $x, y \in V'$ に対し $xy \notin E$ を満たすとき V' を**独立集合**という。$V_1, \ldots, V_k$ が V の部分集合で，(1) 各 V_i は独立集合，(2) $i \neq j$ に対し $V_i \cap V_j = \emptyset$，(3) $V = V_1 \cup \cdots V_k$，を満たすとき**独立集合への分割**と呼ぶ。(2)，(3) を満たすとき $V = V_1 + \cdots + V_k$ と書く。k 個の独立集合への分割をもつグラフを k **部グラフ**という。k 部グラフである必要十分条件は k–彩色可能である。

1–臨界グラフは K_1(自明なグラフまたは1次の完全グラフ) のみである。2–臨界グラフは完全グラフ K_2 のみである。3–臨界グラフはどうなるだろう。

命題 6.5 G が2部グラフである必要十分条件は奇サイクルを持たないことである。

これを示すために連結なグラフ上に距離を定義する。$x, y \in V$ に対し $P = v_0 e_1 v_1 \cdots e_k v_k$ を x から y への道で最短のものとする。このとき $d(x, y) = k$ と定義すると，d は距離の公理を満たす。

演習問題 6.2 d が距離の公理を満たす事を示せ。

命題 6.5 の証明： 2部グラフが奇サイクルを持たない事は明らか。よって G は奇サイクルを持たないと仮定する。$G = (V, E)$ が連結な場合に示せばよい。$x_0 \in V$ を1つ固定する。
$V_1 = \{\, x \in V \mid\ d(x, x_0)$ が偶数$\}$, $V_2 = \{\, x \in V \mid\ d(x, x_0)$ が奇数$\}$ と定義すると $V = V_1 + V_2$ となっている V_i が独立集合である事を示せばよい。$x, y \in V_i$ で $e = xy \in E$ となる x, y が存在したとする。$P = x_0 e_1 v_1 \cdots x$ を x_0 から x への最短路，$Q = x_0 e_1' v_1' \cdots y$ を x_0 から y への最短路とする。v_{i_0} を Q と交わる v_i の中で i が最大のものとする。$P' = v_{i_0} P, Q' = v_{i_0} Q$ とすると，P' と Q' は v_{i_0} のみで交わっている。P' の長さの偶奇と Q' の長さの偶奇は等しい。このとき $P' e Q'$ は奇サイクルとなり矛盾。■

演習問題 6.3 命題 6.5 を用いて「3–臨界グラフは奇サイクル (K_3 を含む) である」事を示せ。

奇サイクル C に対しては $\chi(C) = 3, \Delta(C) = 2$ である。また完全グラフ K_n に対しては $\chi(K_n) = n, \Delta(K_n) = n - 1$ である。この例があるので一般のグラフに対して系 6.4 は best possible である (これ以上改良できない)。しかしこの例を除くと改良できる。

定理 6.6 奇サイクルと完全グラフ以外の連結なグラフ G に対して $\chi(G) \leqq \Delta(G)$ である。

補題 6.7 完全グラフでない 3–連結グラフ G に対し $\chi(G) \leqq \Delta(G)$ が成立する。

証明 x を $\deg(x) = \Delta(G)$ となる頂点とする。$N(x)$ の任意の2頂点が隣接しているとする。このとき $H = G[N(x), x]$ は完全グラフとなる。任意の $y \in V(H)$ に対し $\deg_H(y) = \Delta(G)$ なので $V(H)$ の頂点に接続する辺は H の辺の他にはない。G の連結性より $G = H$ となるがこれは矛盾，よって2頂点 $y, z \in N(x)$ で $yz \notin E$ となるものが存在する。G は 3–連結なので $G - y - z$ は連結である。$G - y - z$ の頂点を x からの $G - y - z$ 上の距離が遠い方から順に $x_1, x_2, \ldots, x_n$ とする。このとき $x_n = x$ となっている。

G の頂点に次の様に $\Delta(G)$–彩色していく。最初に y, z に同色1を塗る。$G_1 = G[y, z, x_1]$ とする。このとき x_i $(i > 1)$ で x_1 と隣接している頂点が存在する (何故か?)。このとき $\deg_{G_1}(x_1) < \deg_G(x_1) \leqq \Delta(G)$ なので x_1 に彩色する事が可能である。x_{i-1} まで彩色できたとする。$i < n$ のとき $G_i = G[y, z, x_1, x_2, \ldots, x_i]$ とすると，x_j $(i < j)$ で x_i と隣接している頂点が存在する。このとき $\deg_{G_i}(x_i) < \deg_G(x_i) \leqq \Delta(G)$ なので x_i に彩色する事ができる。$i = n$ のとき $N(x)$ はすべて彩色されている。y と z の色が同じなので使用している色は高々$\Delta(G) - 1$ 色なので，残りの色を x に彩色すればよい。■

補題 6.8 臨界な連結グラフ G に対し $x, y \in V$ が存在し $G - x - y$ が連結でなければ $xy \notin E$ である。

証明 $G - x - y = H_1 \cup H_2$ とする。また $G_1 = G[H_1 \cup \{x, y\}], G_2 = G[H_2 \cup \{x, y\}]$ とする。G は臨界なので $\chi(G_i) < \chi(G)$ $(i = 1, 2)$ なので G_i は $\chi(G) - 1$ 色で彩色できる。彩色をそれぞれ1つ固定する。G_i の彩色で x が x_i に y が y_i に彩色されているとする $(i = 1, 2)$。$xy \in E$ と仮定すると，$x_i \neq y_i$ である。今 σ を $\chi(G) - 1$ 次の置換で $\sigma(x_2) = x_1, \sigma(y_2) = y_1$ をみたすものとする。G_2 の彩色を j に変えて $\sigma(j)$ にする事により G_2 の新しい彩色が得られる。この彩色と G_1 の彩色を合わせたものは G の $(\chi(G) - 1)$–彩色を与えるこれは矛盾。■

定理 6.6 の証明： $\chi(G)=1$ のとき G は自明なグラフ。これは 1 次の完全グラフなので除外されている。$\chi(G)=2$ のとき辺が 1 つしかなければ G は 2 次の完全グラフである。辺が 2 個以上存在すると最大次数 $\Delta(G)$ は 2 以上なので定理は成立する。$\chi(G)=3$ のとき命題 6.2 より $\chi(H)=\chi(G)$ となる臨界な部分グラフ H が存在する。演習問題 6.3 より H は奇サイクルである。$H=G$ なら除外例になっている。$H \subsetneqq G$ なら H の頂点で H 以外の辺に接続している頂点が存在する。その頂点の次数は 3 以上なので，$\Delta(G) \geqq 3$ である。

$\chi(G) \geqq 4$ とする。$|G|$ についての帰納法で示す。$|G|$ より位数が小さいグラフに関しては成立を仮定する。臨界なグラフについて定理を示せば一般のグラフについて示せるので G は臨界と仮定する。G に関して定理が成立しないと仮定する。即ち $\chi(G)>\Delta(G)$ $(=k$ とおく$)$ と仮定する。このとき G が 3–連結になる事を示すと補題 6.7 より矛盾なので定理が示される。任意の $v \in V$ に対し $H=G-v$ は帰納法の仮定を満たしているので H が完全グラフで奇サイクルでもなければ $\chi(H) \leqq \Delta(H)$ が成立している。H が完全グラフなら G も完全グラフになるので H が奇サイクルとすると，$\chi(G)=4$ なので $\chi(G)>\Delta(G)$ が成立するためには $k=3$ が必要である。このとき $G=K_4$ となり矛盾。よって奇サイクルでもなく $\chi(H) \leqq \Delta(H)$ が成立している。$\Delta(H) \leqq k-1$ とすると G は k–彩色可能になるので $\Delta(H)=k$ である。また $\chi(H)<k$ なら $\chi(G) \leqq k$ となるので $\chi(H)=k$ である。以上から G は $\Delta(G)$–正則であり，『G の任意の頂点 x に対し $H=G-x$ は k–彩色可能で，H の任意の彩色に対し $N_G(x)$ は $\Delta(G)$ 色で塗られている。』$(*)$ 事が分かる。

H の頂点で i に彩色されている頂点全体の集合を V_i とする。$N(v)$ のすべての頂点の色は異なっているので，i 色が塗られている頂点を v_i とする。$H_{ij}=H[V_i \cup V_j]$ $(i \neq j)$ とおき，v_i を含む H_{ij} の成分を C_{ij} とおく。

(1) C_{ij} は v_i と v_j を端点とする道である。

C_{ij} が v_j を含まなければ C_{ij} に含まれる頂点の色を取り替える (i で塗られてる頂点を j に，j はその逆) 事により $(*)$ に反する。よって $v_j \in V(C_{ij})$ である。

$\deg_{C_{ij}}(v_i)>1$ ならば $N_H(v_i)$ には j で塗られた点が 2 点以上存在するので，使用されてない色も存在する。v_i の色をその色に変えれば $(*)$ に反するので $\deg_{C_{ij}}(v_i)=1$ である。同様に $\deg_{C_{ij}}(v_j)=1$ を得る。C_{ij} に $\deg_{C_{ij}}(x) \geqq 3$ となる頂点 x が存在したとする。$N_H(x)$ には i または j で塗られた頂点が 3 つ以上あるので，i,j 以外に使用されていない色 ℓ が存在する。x を ℓ に変えたものも k–彩色になっており，この彩色では C_{ij} は v_j を含んでいないので矛盾。よって C_{ij} の任意の頂点 x に対し $\deg_H(x) \leqq 2$ である。以上により (1) が示された。

(2) 異なる i,j,ℓ に対し C_{ij} と $C_{i\ell}$ は v_i でのみ交わる。

v_i で交わっているのは自明なので，それ以外の点 x で交わっているとすると x は i で塗られている。$N_H(x)$ には j で塗られた頂点が 2 つ，ℓ で塗られた頂点が 2 つ存在するので，i 以外に使われていない色が存在する。x をその色に変えたものも k–彩色になっており，この彩色では C_{ij} は v_j を含んでいないので矛盾。

G が 3–連結のときは補題 6.7 より矛盾。よって G は 3–連結ではないとする。頂点 v,w が存在して $G-v-w$ は連結にはならない。$G-v,w=H_1 \cup H_2$ とする。補題 6.8 より $vw \notin E$ である。$H=G-v$ とおくと，以前と同じ議論で (1), (2) が成立する。$\Delta(G) \geqq 3$ なので $v_1 \in V(H_1)$, $v_2,v_3 \in V(H_2)$ と仮定しても一般性を失わない。C_{12} と C_{13} の両方とも w を含まなければならない。これは (2) に矛盾する。 ∎

定理 6.9 [**4 色定理**] 任意の平面的グラフは 4–彩色可能である。

これを証明する事は勿論できない。ここでは少し弱い形の次を示す。

定理 6.10 [**5 色定理**] 任意の平面的グラフは 5–彩色可能である。

証明 $|G|$ についての帰納法で示す。$|G| \leqq 5$ について定理は成立する。今 $|G| \geqq 6$ で $|G|$ より小さいグラフについて定理成立を仮定する。命題 5.11 より G の平均次数 $d(G)=\dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{v \in V(G)} \deg(v)=\dfrac{2\|G\|}{|G|} \leqq$

$\dfrac{6|G|-12}{|G|} < 6$ なので次数 5 の頂点 x を持つ。帰納法の仮定より $H = G - x$ は 5–彩色可能である。x の次数が 4 より小さければ G は 5–彩色可能なので x の次数は 5 としてよい。$N_G(x)$ の頂点 $v_1, \ldots, v_5$ は x を中心に時計回りに並んでいて，v_i は i で彩色されているとしてよい $(i = 1, \ldots, 5)$。前定理の証明中と同様に V_i を i で彩色された H の頂点の集合とし，$H_{ij} = H[V_i \cup V_j]$ とし，C_{ij} を v_i を含む H_{ij} の成分とする。C_{ij} が v_j を含まなければ前定理証明と同様に G を 5–彩色できるので v_j を含むとする。C_{13} を考える。C_{13} の部分集合として始点 v_1，終点 v_3 の道 P が存在する。$xv_i = e_i$ とする。xe_1Pe_3x はサイクルなので平面を 2 つに分離する。一方は v_2 を含み，他方は v_4 を含んでいる。よって C_{24} が v_4 を含むのは不可能である。これは矛盾。 ∎

次に辺彩色に関して見る。任意のグラフに対し $\chi'(G) \geqq \Delta(G)$ が成立する事は明らか。辺彩色の場合次が成立する。

定理 6.11 任意のグラフ G に対し

$$\Delta(G) \leqq \chi'(G) \leqq \Delta(G) + 1$$

が成立する。

証明　後半の不等式を証明すればよい。$\|G\|$ についての帰納法で証明する。$\|G\| = 0$ のときは成立している。$\|G\|$ より小さいグラフに関して成立を仮定する。

色 α の塗られた辺を α–辺と呼ぶ。また α–辺と β–辺を交互に持つ道を α/β–道と呼ぶ。頂点 v に接続する辺の中に α–辺がないとき v は α を許容するという。

G は $(\Delta(G)+1)$–辺彩色を持たないと仮定する。任意の $xy \in E$ に対し $G - xy$ は $(\Delta(G)+1)$–辺彩色をもつ。このとき x はある色 α を許容し，y はある色 β を許容する。$\alpha = \beta$ ならその色で xy を塗ると G の $(\Delta(G)+1)$–辺彩色が得られるので，$\alpha \neq \beta$ である。y から出発する α/β–道で極大なものを考える。この道の終点が x でなければ，この道を構成する辺のみ α–色と β–色を入替える事により x と y が同じ色 α を許容するので矛盾。よって次が成立する。

$(*)$ 任意の $xy \in E$ と $G - xy$ の任意の $(\Delta(G)+1)$–辺彩色に対し x が α を許容し，y が β を許容すれば，y から始まる極大な α/β–道は x で終わる。

$xy_0 \in E$ とする。$G_0 = G - xy_0$ は $(\Delta(G)+1)$–辺彩色 c_0 を持つ。x は c_0 に関してある色 α を許容している。y_0 はある色 β_0 を許容している。$xy \in E$ で $c_0(xy) = \beta_0$ となるものが存在しなければ xy_0 に β_0 を塗る事により G の $(\Delta(G)+1)$–辺彩色が得られる。これは矛盾なので，その様な y は存在する。それを y_1 とする。$y_0, y_1, \ldots, y_i$ が選ばれているとする。y_i は β_i を許容しているとする。このとき $xy \in E$ で $c_0(xy) = \beta_i$ かつ任意の j $(j = 1, \ldots, i)$ に対し $y \neq y_j$ となるものが存在するとき $y = y_{i+1}$ とする。その様な y が存在しないときはこの操作を止める。$y_0, y_1, \ldots, y_k$ をこの操作で得られた点列とする。$G_i = G - xy_i$ の $(\Delta(G)+1)$–辺彩色 c_i を xy_j $(j < i)$ に対しては $c_i(xy_j) = c_0(xy_{j+1})$，それ以外の e に対しては $c_i(e) = c_0(e)$ と定義する。辺彩色 c_0 に関して y_k は $\beta = \beta_k$ を許容しているとする。このとき辺彩色 c_k に関しても y_k は β を許容している。x が β を許容していると，xy_k に β を塗る事により G の $(\Delta(G)+1)$–辺彩色が得られるので，x は β を許容していない。k の極大性よりある i $(0 < i < k)$ が存在して $c_0(xy_i) = \beta$ となる。P を G_k における c_k に関する y_k を始点とする極大な α/β–道とする。$(*)$ より P は x を終点に持つ。x は α を許容するので最後の辺は β–辺である。$\beta = c_0(xy_i) = c_k(xy_{i-1})$ より最後の辺は xy_{i-1} である。$P = Q \cdot y_{i-1}x \cdot x$ とする。G_{i-1} において c_{i-1} に関して y_{i-1} は β を許容しているので y_{i-1} を始点とする α/β–道 P' は $(*)$ より x を終点に持つ。道 P' は一意的なので最初の部分は Q^{-1} と一致する。即ち P' は y_k を通る。しかし y_k は β を許容するのでこの道 P' は y_k で終わる。これは矛盾。 ∎

定理 6.11 からグラフは $\chi'(G) = \Delta(G)$ のタイプのものと $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ のタイプのものの 2 つのクラスに分れる事が分かる。どのようなグラフがどちらのタイプになるかという事に関してはあまりよく分ってはいない。2 部グラフに関しては次が成立する。

命題 6.12 任意の 2 部グラフ G に対し $\chi'(G) = \Delta(G)$ が成立する。

証明 $\|G\|$ についての帰納法で示す。$\|G\| = 0$ のときは成立する。$\|G\|$ より小さいとき成立を仮定する。$G - xy$ は帰納法の仮定を満たすので $\Delta(G - xy)$–辺彩色が存在する。$\Delta(G - xy) < \Delta(G)$ なら G は $\Delta(G)$–辺彩色を持つので $\Delta(G - xy) = \Delta(G)$ とする。$\deg_{G-xy}(x) < \Delta(G)$ なので x はある α を許容する。同様に y はある β を許容する。$\alpha = \beta$ なら xy に α を塗る事により G の $\Delta(G)$–辺彩色が得られる。よって $\alpha \neq \beta$ で y は α–辺を持つと仮定してよい。y を始点とする極大な α/β–道 P を考える。P が x を通ると x が終点となる。最後の辺は β–辺なので P の長さは偶数である。このとき $P \cdot xy \cdot y$ が奇サイクルになるので矛盾。よって P は x を通らない。P の辺について α と β を塗りかえる事により x, y 共に α を許容する $\Delta(G)$–辺彩色が得られるので，これから G の $\Delta(G)$–辺彩色が得られる。∎

演習問題 6.4 完全グラフに対しては位数が偶数のときは $\chi'(G) = \Delta(G)$，奇数のときは $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ となる事が知られている。その事を次に従い示せ。

(1) 最初に偶数の場合に示す。$\chi'(K_n) \geqq \Delta(K_n) = n - 1$ なので $n - 1$–辺彩色が存在すれば $\chi(K_n) = n - 1$ が分る。頂点を $0, 1, \ldots, n-1$ として 0 を中心とする円上に 1 を頂上として $1, \ldots, n-1$ を等間隔に配置する (図は $n = 6$)。0 と 1 を結ぶ辺，2 と $n-1$ を結ぶ辺，$\cdots$，$\dfrac{n}{2}$ と $\dfrac{n}{2} + 1$ を結ぶ辺に色 1 を塗る。他の辺を着色して $n - 1$ 辺彩色を完成させよ。

(2) 次に n が奇数の場合を考える。定理 6.11 を用いなくても $K_n \subseteq K_{n+1}$ なので $\chi'(K_n) \leqq \chi'(K_{n+1}) = \Delta(K_{n+1}) = n = \Delta(K_n) + 1$ は分かる。K_n が $n - 1$–辺彩色を持つとして矛盾を導け。(ヒント：K_n が $n - 1$–辺彩色を持てば K_n の辺 E は互いに交わらない $E_1, \ldots, E_{n-1}$ に分かれる。そして各 E_i はマッチングになっている。n が奇数のときはこの様な分割は不可能である。)