グラフ理論問題解説 #3

2003–6–19　　河野

演習問題 4.1　グラフ G に対し $\kappa(G) \leqq \lambda(G) \leqq \delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V\}$

最初に $\kappa(G) \leqq \lambda(G)$ を示す。$e_1, e_2, \ldots, e_\ell$ $(\ell = \lambda(G))$ を G を分離する辺の集合とする。e_i の 2 個の頂点から 1 点を指定し v_i とする。v_i の中に重複する点があればその点をカットし番号を詰める。このとき $v_1, \ldots, v_k$ は G を分離する。ここで $k \leqq \lambda(G)$ であるので，$\kappa(G) \leqq k \leqq \lambda(G)$ が成立する。ここまで読んでアレッと思った人はセンスがいいですネ。$G - \{e_1, \ldots, e_\ell\} = G_1 + G_2$ ($G = G_1 \cup G_2$ かつ $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ のときこの様に表記する) となっているとき，適当に $v_1, \ldots, v_\ell$ を選ぶと $G - \{v_1, \ldots, v_k\}$ では G_1 または G_2 の頂点がなくなってしまう場合が起こるかもしれません。その場合は分離しているかどうか分からないので，上手く頂点を選ぶ必要があります。G_1 の頂点 v と G_2 の頂点 w を選んで，その 2 点は含まれないようにします。各自考えて証明を完成させて下さい。2 番目の不等式を証明してそれを使うという手もあります。
次の不等式：最小次数の頂点を v とし，それに隣接するすべての辺を $e_1, \ldots, e_\ell$ $(\ell = \delta(G))$ とする。$\{e_1, \ldots, e_\ell\}$ は v と他の頂点を分離するので $\lambda(G) \leqq \delta(G)$ である。

演習問題 4.2　グラフ G で $\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G)$ となるものをあげよ。

これは各自考えて下さい。これぐらいなら適当に作るという方法もあります。どの様な状況だと等号が落ちるかという事を考えると，もう少し効率的に見つかるかもしれません。

演習問題 4.3　6 頂点グラフで連結度が 1〜5 のものをそれぞれあげよ。

これも各自考えて下さい。1,2,5 は定義が分かっていればすぐ分かると思います。3,4 は連結度がその値である事をきちんと示す必要があるので，少し難しいかも…。

演習問題 4.4　$\delta(G) \geqq |G|-2$ ならば $\kappa(G) = \delta(G)$ を示せ。また $\delta(G) = |G|-3$ かつ $\kappa(G) < \delta(G)$ となるグラフの例をあげよ。

$\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V\} \leqq |G| - 1$ ですから，$\delta(G) \leqq \Delta(G)$ から $\delta(G) = |G| - 2$ または $\delta(G) = |G| - 1$ が分かります。$\delta(G) = |G| - 1$ のとき G は完全グラフなので $\kappa(G) = \delta(G)$ は判ります。$\delta(G) = |G| - 2$ のグラフが $\kappa(G) \leqq |G| - 3$ とすると，$|G| - 3$ 個の元からなる分離集合 B が存在する。$V - B$ は 3 点集合なのでその元を x, y, z とする。今 x と y が B により分離されているとする。$xy \notin E$ より $xz \in E$，同様に $yz \in E$。これは B が分離集合という事に反する。
もう 1 点少なくなると分離することが可能になります。$|G| - 4$ 個の元からなる分離集合を考える事でグラフの形が容易に解ると思います。

演習問題 4.5　3–正則グラフ G に対して $\kappa(G) = \lambda(G)$ が成立する事を示せ。

分離集合を $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ とするとき $(k = \kappa(G))$，各頂点 v_i に対し辺 e_i を選んで $C = \{e_1, \ldots, e_k\}$ が分離集合になるようにできればいいわけです。そのためには勿論 3–正則 (各頂点の次数が 3) という事を使います。$G - B = G_1 + G_2$ と分けられているとします。B の各頂点 v_i に

対し v_i と隣接する G_1 の頂点と G_2 の頂点が存在します。v_i の次数は 3 なので v_i から出ている辺はあと 1 本です。この辺を $v_i v$ として，(1) $v \in V(G_1)$ のときは $e_i = v_i w$，ただし w は v_i に隣接する G_2 の頂点，(2) $v \in V(G_2)$ のときは $e_i = v_i w$，ただし w は v_i に隣接する G_1 の頂点，とし e_i を選びます。(3) $v \in B$ のときはある $j(\neq i)$ に対し $v = v_j$ となっている。このときは，v_i に隣接する G_2 の頂点を w_i，v_j に隣接する G_2 の頂点を w_j とするとき $e_i = v_i w_i, e_j = v_i w_j$ を選びます。このとき $C = \{e_1, \ldots, e_k\}$ が分離集合になる事はすぐ分かる。

演習問題 4.6　命題 4.4 を証明せよ。

この証明を自分で考えられる人はかなりのグラフ人でしょう。このアルゴリズムで選ばれた木 T^* が最適木でないとして矛盾を導く。木 T^* は $e_1, e_2, \ldots, e_n$ の順で選ばれているとする。最適木 T に対し T の辺にならない最小番号の辺を e_k とするとき $f(T) = k$ と決める。f は最適木の集合から自然数の集合への写像である。最適木の中で f の値が最も大きいものを T_1 とする。$k = f(T_1)$ とすると $e_k \notin E(T_1)$ である。$T_1 + e_k$ は木ではないので e_k を含むサイクル C が存在する。このサイクル上に T^* の辺ではないものが存在するので，これを e'_k とする。このとき $T'_1 = T_1 + e_k - e'_k$ とする。T'_1 は全域木である。$w(T'_1) = w(T_1) + w(e_k) - w(e'_k)$ だが，$w(e'_k) \geqq w(e_k)$ なので $w(T'_1) \leqq w(T_1)$ となる。T_1 が最適木ということから T'_1 も最適木で $w(T'_1) = w(T_1)$ が成立する。しかし $f(T'_1) > k$ なので T_1 の選び方に矛盾。

演習問題 4.7　k が奇数のときも $H_{k,n}$ が k–連結になる事を示せ。

$k = 2r + 1$ とおく。k–連結でないと仮定すると分離集合 V' で $|V'| < k$ 即ち $|V'| \leqq 2r$ となるものが存在する。命題 4.5 の証明と同様に i, j を $H - V'$ の異なる成分に属する頂点として $S(i,j) = \{i, i{+}1, \ldots, j{-}1, j\}, S(j,i) = \{j, j{+}1, \ldots, i{-}1, i\}$ とする。今 $|S(i,j) \cap V'| \leqq |S(j,i) \cap V'|$ と仮定しても一般性を失わない。$|S(i,j) \cap V'| < |S(i,j) \cap V'|$ なら命題 4.5 の証明と同様に証明できるので $|S(i,j) \cap V'| = |S(j,i) \cap V'|$ となる。よって i と j が異なる $G - V'$ の成分に属していれば $|S(i,j) \cap V'| = r$ である。$d(i,j)$ が最小になる様な i, j を考える事により $S(i,j) \cap V' = S(i{+}1, i{+}r)$ となっている事が解る。即ち V' は 2 つの部分に V_1, V_2 分かれ，それぞれ $V_1 = S(i_0 + 1, i_0 + r)$, $V_2 = S(i_1 + 1, i_1 + r)$ の形をしている事が解る。この様な V' は G を分離しないので矛盾。

演習問題 4.8　K_9 の部分グラフで 5–連結であるが $H_{5,9}$ と同型でないグラフを見つけよ。($f(5,9) = 23$ だから辺の数は 23 本です。)

これも自分で適当に探して下さい。$H_{5,9}$ を少し変形して作るという手もあります。対称性をあまり崩さないほうが作りやすいかもしれない。