グラフ理論要綱 #1　　　2005–4–22　　　河野

1　グラフの定義

グラフを定義するのに大きくは 3 つの立場がある。最も広い定義は，1 つの頂点から自分自身へ結ぶ辺 (loop と呼ばれる) を認める立場である。2 つ目は loop は認めないが，多重辺 (両端点が同じである 2 つの辺) は認める立場。3 番目は loop も多重辺も認めない立場である。ここでは 3 番目の立場をとる。

定義 1.1 グラフ G とは有限集合 V と V の 2 元からなる部分集合全体の集合 $[V]^2$ のある部分集合 E の組 $G = (V, E)$ の事と定義する。

この定義を初めて見てぱっと分かる人はあまりいないでしょう。普通考える頂点に V の元を対応させ，頂点 x と y を結ぶ辺を $\{x, y\}$ と考えれば，この定義が自然である事は分かるでしょう。

演習問題 1.1　ここでは loop を含まないが多重辺をもつ「グラフ」を**多重グラフ** (*multigraph*) と呼ぶ。また loop をもつ「グラフ」(多重辺を含んでもよい) を**準グラフ**という。多重グラフ，準グラフをきちんと定義せよ。

$e = \{x, y\}$ のとき $e = xy$ と書いて，x(または y) は e に**接続している** (*incident*) といい，x と y は**隣接している** (*adjacent*) という。2 つの辺 $e \neq f$ が共通の端点をもつとき**隣接する**という。$X, Y \subseteq V$ とする。$x \in X, y \in Y$ となるとき $e = xy$ を X–Y 辺という。$F \subseteq E$ にたいし $F(X, Y) = \{e \in F \mid\ e$ は X–Y 辺$\}$ と書く。$F(\{x\}, Y)$,$F(X, \{y\})$ は $F(x, Y), F(X, y)$ とも書く。頂点 x に接続辺で F に属する辺全体を $F(x)$ と書く。お互いに隣接しない頂点は**独立である** (*independent*) と言われる。辺に関しても同じく**独立**という。どの頂点も隣接しない頂点 (または辺) の集合を**独立集合** (*independent set*) という。マッチングの問題は最大の独立集合を見つける問題である。

演習問題 1.2　グラフ $G = (V, E)$ の頂点集合を $V\ \ \{v_1, \dots, v_n\}$ とする。このグラフ G に対し次のように定義される n 次行列 A を G の**隣接行列** (*adjacency matrix*) という : $v_iv_j \in E$ のとき $a_{ij} = 1$，$v_iv_j \notin E$ のとき $a_{ij} = 0$ とし，$A = (a_{ij})$ と定義する。このとき $A^2 = AA$ の (i, j) 成分が何を意味するか考えよ。また一般に自然数 k に対し A^k の (i, j) 成分が何を意味するか考えよ。

V が空集合のとき $[V]^2$ は空集合なので，$E \subseteq [V]^2$ となる集合 E は空集合のみである。$(\emptyset,\emptyset)$ を**空グラフ**という。空グラフをグラフと認めない立場もある。我々は一応認める立場で行く事にしよう。V が 1 点からなる集合のとき，$[V]^2$ は空集合なので，やはり $E \subseteq [V]^2$ となる集合 E は空集合のみである。V が 1 点のときグラフは $(\{x\},\emptyset)$ しかない。このグラフを**自明なグラフ**と呼ぶ。

有限集合 X に対し $\#(X)$ を集合 X の元の個数とする。グラフ $G = (V, E)$ に対し，$\#(V)$ をグラフ G の**位数** (*order*) といい，$|G|$ で表す。$\#(E)$ を**辺数**といい，$\|G\|$ で表す。

G の頂点 v に対し v と接続する点の集合を v の**近傍** (*neighborhood*) といい $N_G(v)$ または単に $N(v)$ と書く。$\deg_G(v) = \deg(v) = \#(N(v))$ を v の**次数** (*degree*) という。前に定義した記号を用

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

いると $\deg(v) = \#E(v, V)$ である。V の部分集合 S に対し $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v) - S$ を S の近傍と呼ぶ。単に $N(S)$ と書く場合もある。

次数については次の**握手定理**がある。証明は難しくないが，面白い応用もある。

定理 1.2 [**握手定理**] グラフ $G = (V, E)$ について

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\|G\|$$

が成立する。

この定理を用いると次を解くことができる (ただし問題 1.5 には必要ない)。

演習問題 1.3 グラフにおいては，次数が奇数であるような頂点の個数は偶数である事を示せ。
演習問題 1.4 7 人の学生が休暇に入っている。彼らは，各々が他の 3 人に葉書を送ろうと決めた。どの学生も，自分が葉書を送った丁度 3 人から葉書を受け取ることは可能か?

演習問題 1.5 頂点を 2 点以上含むグラフには，同じ次数を持つ 2 つの頂点が存する事を示せ。

2 つのグラフ $G = (V, E), G' = (V', E')$ の対し一対一上への写像 $f : V \to V'$ で $xy \in E \Longleftrightarrow f(x)f(y) \in V'$ を満たすものが存在するとき，G と G' は**同型である**といい，$G \cong G'$ と書く。この写像 f を**同型写像**という。

演習問題 1.6 次図 1.1 の 2 つのグラフが同型かどうかを判定せよ。

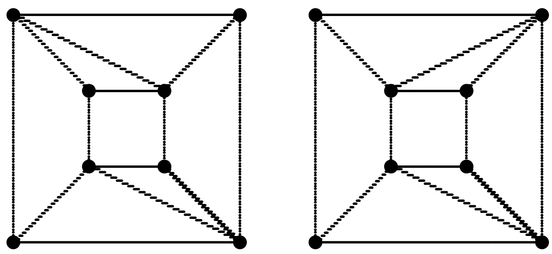

図 1.1

演習問題 1.7 G の隣接行列を A，G' の隣接行列を A' とする。G と G' が同型であるための必要十分条件を A, A' に関する条件を用いて述べよ。

演習問題 1.8 次図 1.2 のなかで同型なものはどれか。同型でないのはどれか，判定せよ。

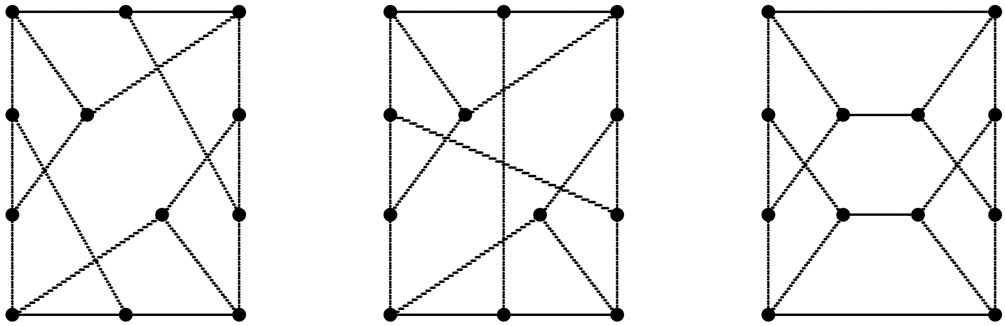

図 1.2

V の部分集合 $V(H)$ と E の部分集合 $E(H)$ が存在して，$H = (V(H), E(H))$ がグラフになっているとき，H を G の**部分グラフ**といい，$H \subseteq G$ と書く。2 つのグラフ $G = (V, E), G' = (V', E')$ に対し $G \cup G' = (V \cup V', E \cup E'), G \cap G' = (V \cap V', E \cap E')$ と定義する。$H \subseteq G$ であり，任意の 2 頂点 $x, y \in V(H)$ に対し，$xy \in V(E)$ ならば $xy \in V(H)$ が成立しているとき，H を G の**誘導部分グラフ**という。このとき $V(H)$ は G において H を**誘導する**, または**生成する**といい，$H = G[V(H)]$ と書く。$G[H]$ と書く場合もある。$V(H) = V$ となっているとき，H を**全域部分グラフ**と呼ぶ。H が G の全域部分グラフであるための必要十分条件は $G[H] = H$ である

グラフ $G = (V, E)$ と V の部分集合 U に対し，$G[V - U]$ を $G - U$ と書く。また $v \in V$ に対し $G - \{v\}$ を $G - v$ と書く。また G の部分グラフ $H = (V(H), E(H))$ に対し $G - V(H)$ を $G - H$ と書く[(1)]。$[V]^2$ の部分集合 F に対し $G - F = (V, E - F)$，$G + F = (V, E \cup F)$ と定義する。上と同様に $G - \{e\}, G + \{e\}$ を $G - e, G + e$ とも書く。

グラフ $G = (V, E), G' = (V', E')$ に対し $G \cap G'$ が空グラフのとき，$\widetilde{V} = V \cup V', \widetilde{E} = E \cup E' \cup \{ xx' \mid x \in V, x' \in V' \}$ とおくとき，$(\widetilde{V}, \widetilde{E})$ を $G * G'$ と書く。$G = (V, E)$ に対し $\overline{E} = [V]^2 - E$ とおくとき，$(V, \overline{E})$ を G の**補グラフ**といい $\overline{G}$ と書く。$K^1, K^{1'}$ を自明なグラフで $K^1 \cap K^{1'}$ は空グラフとする。$K^1 * K^{1'} = K^2$ と定義する。帰納的に $K^n = K^{n-1} * K^1$ と定義し，n 次の**完全グラフ**という。$\overline{K^m} * \overline{K^n}$ を**完全 2 部グラフ**といい，$K_{m,n}$ と書く。

グラフ G のなかの**歩道** (walk) P とは頂点と辺の交互列 $v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_n v_n$ の事，ただし $e_i = v_{i-1} v_i$ となっているとする[(2)]。特に v_0 を**始点** (*initial point,initial vertex*)，v_n を**終点** (*terminal point*) と呼ぶ。$v_0 = V_n$ となる歩道を**閉歩道** (*closed walk*) という。始点と終点以外の頂点を**内点** (*inner point*) と呼ぶ。歩道において $e_i \neq e_j (i \neq j)$ かつ $v_i \neq v_j (i \neq j)$ となっているとき**道** (*path*) という。頂点からなる部分集合 A, B に対し始点が A に属し，終点が B に属し，内点が A にも B にも属さない道を A–B **道**という。また与えられた部分グラフ H に対し始点・終点のみが H に属する非自明な道を H–**道**という。$P := v_0 e_1 \cdots v_n$ が道であり，$e_0 = v_n v_0 \in E$ かつ $n \geqq 2$ のとき $C := v_0 e_1 \cdots v_n e_0 v_0$ を**閉路** (*cycle*) と呼ぶ。

グラフ G の任意の 2 点に対し，一方の点を始点に他方の点を終点に持つ道が存在するとき，G は**連結** (*connected*) であるという。グラフ G は $G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$ と書ける。ただし，各 G_i は連結で，$G_i \cup G_j (i \neq j)$ は連結ではない。このとき各 G_i を G の**連結成分** (*connected component*) という。

---
(1) この記号は部分グラフでない場合も用いられるかもしれない。
(2) 多重辺を持たないグラフを扱っているので，頂点の列だけで歩道は確定する。多重辺を扱う可能性もあるので，その場合にも対応できる定義にしておいた。