グラフ理論要綱 #2

2005–5–13 河野

2 木

サイクルを含まないグラフを**林** (*forest*) といい，連結な林を**木** (*tree*) と呼ぶ。

演習問題 2.1 G を連結なグラフとすると，$|G| \leqq \|G\|+1$ が成立する。

命題 2.1 G が連結グラフのとき，木である必要十分条件は $|G| = \|G\|+1$ である。

木に関しては次の定理が基本的である。

定理 2.2 グラフ T に関して次の 4 つは同値である。
(1) T は木である。
(2) T の任意の 2 頂点は T の中で唯一の道により結ばれている。
(3) T は連結性関し極小である。即ち，T は連結であるが，任意の辺 e に対し $T-e$ は非連結である。
(4) T は無サイクル性に関し極大である。即ち，T は無サイクルであるが，任意の隣接しない 2 点 x, y に対し $T+xy$ はサイクルを含む。

グラフ G の全域部分グラフで木になっているものを**全域木** (*spanning tree*) という。

命題 2.3 連結グラフは全域木を含む。

木 T に対しその 1 頂点 r が指定されているとき，(T, r) を**根つき木** (*rooted tree*) という。根つき木 (T, r) の頂点 V 上に次の様に**順序関係**を定める事ができる。頂点 y に対し r を始点とし y を終点とする唯 1 つの道 $P(r, y)$ が定まるが，この道が頂点として x を含んでいるとき $x \leqq y$ と定める。

グラフ G に含まれる根つき木 (T, r) が次の性質を持つとき**正規木** (*normal tree*) という；G の中の任意の T–道の両端点も T が定める順序で比較可能 (頂点 x, y に関し $x \leqq y$ または $y \leqq x$ が成立する) である。正則木はコンピュータサイエンスでは**深さ優先探索木** (*depth-first search tree*) と呼ばれているようです。

命題 2.4 任意の連結グラフは，任意に指定した頂点を根に持つ全域正規木を部分グラフとして含む。

全域正規木を発見するアルゴリズムとして次がある。この手続きが全域正規木を見つけるアルゴリズムになっている事が示されるなら，命題 2.4 の別証明を与える。

(1)r を出発点として G の辺をたどりながらまだ訪れてない頂点を探し可能な限り進む。その様な頂点が発見できないときは (2) へ行く。
(2) 今居る頂点から 1 つ戻って (3) へ行く。(来た経路は覚えているものとする)
(3) 今居る頂点を出発点にして G の辺をたどりながらまだ訪れてない頂点を探し可能な限り進む。その様な頂点が発見できないときは，今居る頂点が r なら終了，そうでなければ (2) へ行く。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

演習問題 2.2　これが本当にアルゴリズムになっているかチェックせよ。

演習問題 2.3　このアルゴリズムを実装するプログラムを書け。