

### 3 オイラー回路と一筆書き

最初に用語を定義しよう。

定義 3.1  $G = (V, E)$  をグラフとする。グラフ  $G$  における歩道  $W : v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_{n-1} e_n v_n$  が同じ辺を含まないとき、つまり  $i \neq j$  に対し  $e_i \neq e_j$  をみたすとき、小径 (trail) という。両端点と同じ ( $v_0 = v_n$ ) である小径を回路, 閉小径 (circuit, closed trail) という。

多重グラフ・準グラフでなければ、歩道は頂点の並び、または辺の並びだけでも確定するので、 $W := v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_{n-1} e_n v_n$  を  $v_0 v_1 \cdots v_{n-1} v_n$  または  $e_1 e_2 \cdots e_n$  と略記することもある。ただし後者の場合  $n = 1$  のとき方向は確定しないし、 $n = 0$  のときは表現する事ができない。 $n = 0$  のときこれを自明な道 (trivial path) という。

演習問題 3.1 グラフ  $G$  と 2 頂点  $a, b$  について次の 2 つが同値である事を示せ。

- (1) 頂点  $a$  と  $b$  を結ぶ歩道が存在する。
- (2) 頂点  $a$  と  $b$  を結ぶ道が存在する。

定義 3.2 グラフ  $G$  における回路  $W$  が  $G$  のすべての辺とすべての頂点を含むときオイラー回路 (Eulerian circuit) という。小径がすべての辺と頂点を含むときオイラー小径 (Eulerian trail) という。

オイラーが 1736 年に示したのは次の定理である。

定理 3.3 グラフ  $G$  がオイラー回路を持つならば、 $G$  は連結であり、すべての頂点の次数は偶数である。

証明  $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_{n-1} e_n v_n$  をオイラー回路とする。このとき勿論  $v_0 = v_n$  が成立している。任意の 2 頂点  $v_i, v_j$  ( $i < j$ ) について  $v_i$  と  $v_j$  を結ぶ道  $v_i e_{i+1} v_{i+1} \cdots e_j v_j$  が存在するので連結である。各頂点  $v$  がオイラー回路に現れる様子を見る。 $v = v_i$  ( $i \neq 0, n$ ) のとき、 $e_i$  と  $e_{i+1}$  は頂点  $v$  と接続している。よって、回路の端でない部分に頂点  $v$  が現れると、辺は 2 つ現れる。 $v \neq v_0$  のとき、頂点が  $h$  回現れると  $v$  の次数は  $2h$  である。

また  $v = v_0$  のとき  $v = v_n$  なので端に 2 つ辺が現れる。 $v = v_i$  ( $i \neq 0, n$ ) となる  $i$  が  $h$  個存在した場合  $v$  の次数は  $2h + 2$  である。いずれの場合も頂点の次数は偶数である。■

100 年以上後になって、ヒールホルツァー (Hierholzer) がこの定理の逆も成立する事を示した。この 2 つを合わせてオイラーの定理と呼ばれる事が多い (可哀そうな Hierholzer)。

定理 3.4 グラフ  $G$  が連結で、 $G$  のすべての頂点の次数が偶数ならば、 $G$  はオイラー回路を持つ。

この証明のため次の補題を用意する。

補題 3.5 グラフ  $G$  において、どの頂点の次数も正で偶数ならば、 $G$  の任意の頂点はある回路の上にある。

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

証明 任意の頂点  $v$  を選び、そこを始点に小径を作っていく。この小径:  $ve_1v_1 \cdots e_kv$  が  $v \neq w$  のとき、この中に現れる  $w$  に接続する辺は奇数個である。よってこの小径は延長する事ができる。頂点は有限個だからいつかは延長できなくなる。このとき  $v = w$  でなくてはならない。よってこの小径は回路である。 ■

これで定理 3.4 を証明する準備ができた。

定理 3.4 の証明:  $G = (V, E)$  を連結ですべての頂点の次数が偶数であるグラフとする。  $C = v_0e_1v_1 \cdots e_nv_n$  を最長の回路とする。  $C$  がすべての辺を含んでいればオイラー回路であり、定理は正しい。よって含んでいない辺があるとす。  $E' = E - \{e_1, \dots, e_n\}$  とし、  $V'$  を  $E'$  のある辺に隣接するすべての頂点の集合とする。  $H = (V', E')$  とすると  $H$  のすべての頂点の次数は偶数である。  $H$  は連結とは限らないが、  $G$  が連結であるので、  $C$  と  $H$  は共通の頂点  $v_k$  を持つ。補題 3.5 より  $H$  のなかに  $v_k$  を含む回路  $C_1$  が存在する。これを  $v_km_1 \cdots m_rv_k$  とする。このとき  $v_0e_1 \cdots v_kv_km_1 \cdots m_rv_ke_k \cdots e_nv_n$  は  $C$  より長い  $G$  の回路となり矛盾。 ■

この証明をよく見ると、オイラー回路を見つけるアルゴリズムが見つかる。つまり、オイラー回路を見つけるには次を順に行えばよい。

- (1) 最初適当に回路をとる。
- (2) グラフから回路を引いて残りがなければおしまい、それが求めるオイラー回路である。残ってれば、残りに元の回路と交わる回路が存在するので、定理の証明の様に回路を組み合わせて長い回路を作る。
- (3) 以下 (2) を繰り返す。

定理 3.3, 3.4 の系として、一筆書きに関する命題が証明される。

系 3.6 グラフ  $G$  が一筆書きできる必要十分条件は連結であって、すべての点の次数が偶数か、奇数次数の点が 2 つである事である。

演習問題 3.2 系 3.6 を証明せよ。

演習問題 3.3 5 つの国際的代表団が、ある晩円卓を囲んで会議を開く。2 人のアメリカ人、2 人のフランス人、2 人のドイツ人、2 人のイギリス人、2 人の日本人がいる。着席したときに、異なる国の組合せの可能なすべてが、隣合せて実現しなければならない。どの様に席順を決めたらよいか? (ヒント:  $K_5$  のオイラー回路)

演習問題 \*3.4 任意の辺に対しそれを含むサイクルが奇数個ある様な連結なグラフはオイラー回路を持つことを示せ。