グラフ理論要綱 #4　　2005–5–27　　河野

4 マッチング

グラフ $G=(V,E)$ に対し独立な辺の集合 M を**マッチング**と呼ぶ。即ち $M \subseteq E$ であり，任意の $e_1, e_2 \in M$ $(e_1 \neq e_2)$ に対し e_1 の頂点と e_2 の頂点は同じ頂点を含まない。頂点の集合 U が次を満たすとき U は M に**マッチされている**という ; $\forall v \in U, \exists e \in M$; v は e と接続している。U がマッチング M でマッチされているとき，M を U のマッチングと呼ぶ。

$G=(V,E)$ が任意の頂点 v に対し $\deg(v)=k$ となっているとき，G は k–**正則**であるという。k–正則全域部分グラフを k–**因子**という。1–因子は頂点全体の集合 V のマッチングである。

グラフ $G=(V,E)$ とマッチング M を考える。我々は個数が一番多いマッチング (それを**最大マッチング**と呼ぶ) を探したい。そのために次を定義する。道 $P := v_0 e_1 v_1 \cdots e_n v_n$ が M **に関する交互道**であるとは $e_{2i-1} \notin M$ かつ $e_{2i} \in M$ $(i=1,2,\ldots)$ かつ v_0 は M に属する辺の頂点になっていないときをいう。P が交互道であり，v_n が M に属する辺の頂点になっていないとき M **に関する増大道**という。M が交互道のとき $M' = (M - \{e_2, e_4, \ldots\}) \cup \{e_1, e_3, \ldots\}$ はまたマッチングになっているので，P が増大道なら $|M'| = |M| + 1$ となっている。次の命題から最大マッチングを求めるためには増大道を探せばよいことが分かる。

命題 4.1 M が最大でないマッチングならば M に関する増大道が存在する。

証明　M を最大でないマッチング，M' を最大マッチングとする。M と M' の対称差 $M \triangle M' = (M \cup M') - (M \cap M')$ を考える。$M \triangle M'$ は頂点も併せてグラフと見ることができる。$M \triangle M'$ の頂点の次数は高々2 である。$M \triangle M'$ の連結成分は M または M' に関する交互道になっている。連結成分 P に対し P が奇数個の辺を含めばそれは増大道である。M' に関する増大道は存在しないので，M に関する増大道になる。よってすべての連結成分は偶数個の辺を含むと仮定する。このとき $|M| = |M'|$ となり矛盾。よって M は増大道を含む。 ∎

マッチングのなかでも 2 部グラフのマッチングは重要である。G を 2 部グラフとする。しばらくの間特に断らない 2 部グラフといった場合 $G=(V,E)$ が $V = A \cup B$ $(A \cap B = \emptyset)$ と分かれていて，A 同士及び B 同士を結ぶ辺が存在しないとする。更に対称性より $|A| \leqq |B|$ としておく。A のマッチングが G の最大マッチングを与える

$U \subseteq V$ が**頂点被覆**であるとは，G の任意の辺に対しその頂点となる点が U のなかに存在する事をいう。M をマッチング，U を頂点被覆とすると

$$|M| \leqq |U|$$

が成立するのは明らかである。2 部グラフの場合頂点被覆の最小個数が最大マッチングの個数を与える。

定理 4.2 [Köning 1931] 2 部グラフ G の最大マッチングが含む辺の個数は，頂点被覆が含む点の個数の最小値に等しい。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

証明　2 部グラフ G の交互道・増大道と言った場合 A から始まるものに限ることにする。M を G の最大マッチングとする。各辺 $e \in M$ に対し次のルールで頂点を選び，その集合を U とする；$e = ab$ (a は A に属す頂点，b は B に属す頂点とする) に対し e が交互道の終点になっている場合は b を，そうでない場合は a を選ぶ。

このように選ばれた U が頂点被覆であることが示されれば証明は終わる。$ab \in E$ を任意の辺とする。$ab \in M$ なら頂点の選び方により，$a \in U$ または $b \in U$ が成立する。よって $ab \notin U$ とする。M は最大マッチングなので $a'b' \in M$ で $a = a'$ または $b = b'$ が成立する辺が存在する。$b = b'$ の場合，e が交互道になっているので，頂点の選び方により $b' \in U$ となり $b \in U$ となる。b を頂点にもつ M の辺は存在しないとしてよい。$a = a'$ となっている。$a' \notin U$ とすると，頂点の選び方により $b' \in U$ 即ち $a'b'$ は交互道 P の終点になっている。このとき Pe は増大道になるので矛盾。∎

A のマッチングが存在すれば，任意の $S \subseteq A$ に対し $|N(S)| \geqq |S|$ はすぐに分かるがこの条件は十分条件にもなっている。

定理 4.3 [**結婚定理** Hall 1935] A がマッチングを持つ必要十分条件は $\forall S \subseteq A$ に対し $|N(S)| \geqq |S|$ が成立する事である。

ここで 3 通りの証明を紹介する。

(1) 最初は定理 4.2 **を用いるもの**：G が A のマッチングを持たなければ定理 4.2 により頂点被覆 $U = A' \cup B'$ で $|U| < |A|$ となるものが存在する。$|A'| + |B'| = |U| < |A|$ より $|B'| < |A| - |A'| = |A - A'|$ となる。U は頂点被覆であるので，$A - A'$ と $B - B'$ を結ぶ辺を持たない。よって

$$N(A - A') \leqq |B - B'| < |A - A'|$$

となり結婚定理の条件を満たしていない。

(2) 増大道を見つける：

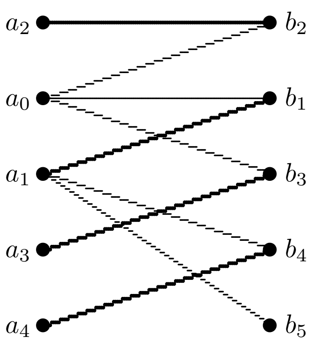

図 4.1

M のマッチング M に対し A のある頂点 (それを a_0 とする) がマッチされていないとする。次に述べる様な順序で増大道を見つける。

最初に点列 $a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots,$ を選ぶ。点列は異なる頂点 $a_i \in A, b_i \in B$ からなる列で次を満たすなかで極大なものとする：(a) a_0 はマッチされていない。(b) b_i はある頂点 $a_{f(i)} \in \{a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ に隣接している。(c) $a_i b_i \in M$。

極大性を除き (a)—(c) を満たす点列は存在する。よって極大なものも存在する。この極大な点列の最後の点が A に属することはない。何故なら $a_i \in A$ がこの列の最後の点とすると，条件 (a)—(c) を満たすように b_{i+1} を選べないことになる。しかし結婚定理の条件から $|N(\{a_0, \ldots, a_i\})| \geqq i + 1$ が成立するので，$N(\{a_0, \ldots, a_i\}) - \{b_1, \ldots, b_i\}$ は空集合ではない。この中から b_{i+1} を選べば条件 (a)—(c) は満たされる。よって点列の最後の点を $b_k \in B$ とする。このとき道 P を

$$P := b_k a_{f(k)} b_{f(k)} a_{f^2(k)} b_{f^2(k)} \cdots a_{f^r(k)}$$

とする。ただし $f^r(k) = 0$ とする。

この道 P^{-1} は交互道である。この P^{-1} が増大道であることが示されれば証明が終わる。増大道でないとすると，b_k は M でマッチされている。即ちある $a \in A$ が存在して $ab_k \in M$ となっている。$a = a_i$ $(0 < i < k)$ とすると M がマッチングということから $b_k = b_i$ となり矛盾。

(3) $|A|$ に関する帰納法： $|A| = 1$ のとき成立は明らか。$|A| \geqq 2$ として $|A|$ より小さいときは結婚定理が成立することを仮定する。

最初に，任意の空でない真部分集合 $S \subsetneq A$ に対して，$|N(S)| \geqq |S| + 1$ が成立している場合を考える。辺 $e = ab \in G$ を 1 つ任意に固定し，$G' = G - \{a, b\}$ とする。このとき $A' = A - \{a\}$ の任意の部分集合 S に対し $|N_{G'}(S)| \geqq |S|$ が成立している。帰納法の仮定より G' において A' のマッチング M' を持つ。$M = M' \cup \{e\}$ とおくと，M は G における A のマッチングになる。

演習問題 4.1　2 部グラフでないグラフ G で結婚定理が成り立たない例をあげよ。

定理の系として次が従う。

系 4.4 2 部グラフ G が k–正則なら 1–因子を持つ。

証明　G が k–正則ならば $|A| = |B|$ が成立する。よって A のマッチングは G の 1–因子になっている。S を A の任意の部分集合とする。S と $N(S)$ の間には $k|S|$ 本の辺が存在している。この辺は $N(S)$ に接続する $k|N(S)|$ 本の辺の部分集合になっている。よって $k|S| \leqq k|N(S)|$ が成立している。よって定理 4.3 より G はマッチングを持つ。 ∎

系 4.5 G は一般のグラフとする。$2k$–正則なら 2–因子を持つ。

証明

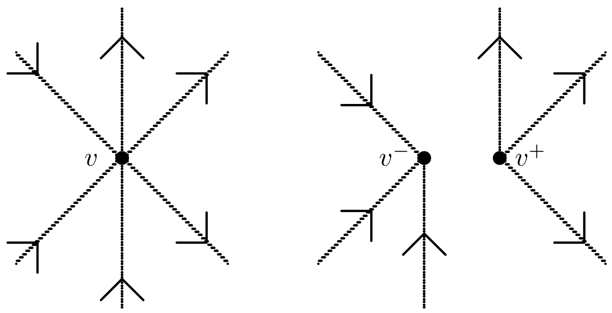

図 4.2

この定理自身は Petersen(1891) によって別の方法で (かなり複雑に) 証明されたものである。定理 4.3 の応用として，簡単に証明される。

G から次の様にして新しいグラフ G' を作る。オイラーの定理よりオイラーサーキット $v_0e_0v_1 \cdots e_{t-1}v_t$ $(v_0 = v_t)$ を持つ。各辺に対し v_{i-1} から v_i の向きを入れておく。各頂点 v に対し新しい頂点を v^-, v^+ とする。v に接続する辺 e に対し，それがオイラーサーキットの向きに関して v が終点になっているときは v^- に，始点になっているときは v^+ に接続する。このようにして新しいグラフ G' ができる。作り方より G' は k–正則であり，2 部グラフになっている。定理 4.3 より G' には 1–因子 M' が存在する。この M' に対応する G の辺をあつめた集合を M とすると，M は G の 2–因子になっている。 ∎

以下 G は 2 部グラフというわけではなく**一般のグラフとする。**$q(G)$ でグラフ G の**奇成分** (連結成分の中で個数が奇数の成分) の個数を表す。このとき G が 1–因子を持てば任意の $S \subseteq V$ に対し $q(G - S) \leqq |S|$ が分かる。この条件は十分条件になっている事が分かる。次が成立する。

定理 4.6 [Tutte **の定理** 1947] G が 1–因子を持つ $\iff \quad \forall S \subseteq V \; ; \; q(G-S) \leqq |S|$

証明　$q(G-S) > |S|$ となる集合を**悪い集合**と呼ぶことにしよう。十分条件は明らかなので，1–因子を持たないグラフが悪い集合を含むことを示す。

最初に 1–因子を持たないグラフの中で辺に関して極大なグラフに関して悪い集合を見つければ，すべてのグラフに対し悪い集合が見つかることを示す。$G=(V,E)$ を 1–因子を持たない任意のグラフとする。$G'=(V,E')$ を $E \subseteq E'$ となるグラフで 1–因子を持たないものとする。G' に関し悪い集合 S が，即ち $q(G'-S) > |S|$ となる集合 S が存在したとする。$G'-S$ の連結成分は $G-S$ のいくつかの連結成分といくつかの辺の和になっている。$G'-S$ の奇成分は少なくとも 1 つ $G-S$ の奇成分を含む。よって $q(G-S) \geqq q(G'-S)$ が成立する。よって S は G に関しても悪い集合になっている。

よって G は 1–因子を持たないグラフの中で極大と仮定して証明すれば一般のグラフに対しても証明される。以下 G は 1–因子を持つグラフの中で極大と仮定する。

S が G の悪い集合だとすると，S は次の性質 $(*)$ を持つ。「$(*)$ $G-S$ のすべての連結成分は完全グラフで，各頂点 $s \in S$ は $G-s$ のすべての頂点と隣接している。」逆に S が性質 $(*)$ を満たすと S または空集合が悪い集合になる。何故なら S が悪い集合でないとする。$G-S$ の各奇成分と S の頂点を結ぶ辺を選ぶ。奇成分の残りの頂点を結ぶ辺を選ぶ。偶成分はその成分の中の 2 頂点を結ぶ。S の奇成分と結ばれていない頂点の個数が偶数なら 1–因子を構成できる。奇数なら G の頂点の個数は奇数である。このときは空集合が悪い集合になる。

S をすべての頂点と隣接している点の集合とする。このとき S が性質 $(*)$ を持つことを示す。そのために S が性質 $(*)$ を持たないと仮定する。$G-S$ の連結成分の中には結ばれていない点 a, a' が存在する。連結成分内の a–a' 道で最短なものを考える。この道の最初の 3 点を a, b, c とすると，$ab \in E$ であり，$ac \notin E$ である。$b \notin S$ なので $bd \notin E$ となる点 d が存在する。

G の極大性より $G+ac$ は 1–因子 M_1 を持つ。G が 1–因子を持たないことから $ac \in M_1$ となっている。同様に $G+bd$ は 1–因子 M_2 を持ち，$bd \in M_2$ となっている。d を始点とする G における道 P で次の性質を持つ極大なものを P とする ; (1) 最初の辺は M_1 に属す，(2) M_1 に属する辺と M_2 に属する辺を交互に通る。P の終点を v とする。P の最後の辺が M_1 に属しているとき $v=b$ である。またこの道 P は辺 ac を含まない。このとき P に bd を加えた歩道はサイクル C になる。サイクル C に属する M_2 の辺をすべて C に属する M_1 の辺で置き換えた集合を $M_2' = M_2 - (M_2 \cap C) \cup (M_1 \cap C)$ とすると M_2' は G の 1–因子になり矛盾。よって P の最後の辺は M_2 に属する。

このとき $v=a$ または $v=c$ となる。この道 P が b を通ることはない。道 P に辺 vb および vd を付け加えた歩道はサイクル C になる。前と同様に C に属する M_2 の辺をすべて C に属する M_1 の辺で置き換えた集合を $M_2' = M_2 - (M_2 \cap C) \cup (M_1 \cap C)$ とすると M_2' は G の 1–因子になり矛盾。

S が性質 $(*)$ を持たないと仮定したことから矛盾が起こったので，S は性質 $(*)$ を持つ。 ∎

命題 4.7 橋を持たない 3–正則グラフは完全マッチングを持つ。ここで辺 e が橋であるとは G は連結であるが，$G-e$ が連結でないときをいう。

証明　S を V の任意の部分集合とする。X を $G-S$ の奇成分とする。X の各頂点から 3 本の辺がでているので全体で $3|X|$(奇数) 本の辺がでている。e が X–辺なら 2 つ使われるので X–辺以外の辺の個数は奇数個である。よって X–S 辺は奇数本である。1 本だと橋が存在するので 3 本以上存在する。よって S–$G-S$ 辺は $3q(G-S)$ 辺以上存在する。3–正則より S–$G-S$ 辺は $3|S|$ 以下なので $3q(G-S) \leqq 3|S|$ となり Tutte の定理の仮定が満たされる。 ∎

演習問題 4.2　橋を持つと 3–正則グラフでも完全マッチングを持たないものが存在する。その例をあげよ。

証明はしないが次の定理を紹介しておく。この様な type の定理を**構造定理**と呼ぶことがある。

定理 4.8 [Gallai–Edmonds **のマッチング定理**] 任意のグラフ G は次の性質を持つ頂点の集合 S を持つ。
(1) S は G に「マッチ可能」
(2) $G-S$ のすべての連結成分は「因子臨界的」

定理に出てきた用語を定義しておく。新しいグラフ $H_S=(V_S,E_S)$ を次の様に定義する。$T=\{C|\ C$ は $G-S$ の連結成分$\}$ とし，$V_S=S\cup T$ とする。また E_S は次の形の辺 ℓ からなる集合とする。ℓ は $s\in S$ と $C\in T$ を結ぶ辺，ただし G において s と C の頂点を結ぶ辺が存在するときのみ結ぶ。このグラフ H_S が S のマッチングを含んでいるとき S は G に「**マッチ可能**」という。G の任意の頂点 v に対し $G-v$ が 1–因子を持つとき G は「**因子臨界的**」という。

この定理の S が求まるとすべての最大マッチングを次の様に求める事ができる。一般にマッチング M に対し M の辺で端点の少なくとも一方が S に属しているものの個数を $k_S=k_S(M)$，両端点が $G-S$ に属しているものの個数を $\ell_S=\ell_S(M)$ とすると $k_S+\ell_S=|M|$ が成立している。また

$$k_S\leqq|S|\qquad \ell_S\leqq\frac{1}{2}(|V|-|S|-q(G-S))$$

が成立している。上の式で等号が成立しているようなマッチングを持つが，これは最大マッチングである。逆に等号を満たすマッチングは最大マッチングである。よって任意の最大マッチングは次の様に得られる。

(1)H_S における最大マッチングを 1 つ選ぶ。
(2) そのマッチングの各辺に対応して G の辺を選ぶ。辺が $s\in S$ と $C\in T$ を結ぶものなら，C の頂点 v で $sv\in E$ となるものを選び，$e=sv$ を対応する辺とする。
(3)$G-S$ の各成分に対し (2) で選んだ頂点 v を除いて 1–因子を選ぶ。

演習問題 4.3　G が 2 部グラブのとき S はどのような集合になっているか?

Tutte の定理から次が出てくる。

命題 4.9 [Tutte **の定理の一般化**]
G が $2k$ 個からなるマッチングを持つ　$\Longleftrightarrow$　$\forall S\subseteq V$; $q(G-S)\leqq|S|+|G|-2k$

演習問題 4.4　$G*K^{|G|-2k}$ に定理 4.6 を適用することにより命題 4.9 を導け。

演習問題 *4.5　A を有限集合，$A_1,\ldots,A_n$ をその部分集合とし，$d_1,\ldots,d_n$ を自然数とする。任意の $I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ に対し

$$\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|\geqq\sum_{i\in I}d_i$$

が成立するとき，各 k $(k = 1, \ldots, n)$ に対し $|D_k| = d_k$ となる集合 $D_k \subseteq A_k$ で $D_1, \ldots, D_n$ が互いに共通部分を持たないものが存在することを示せ。**ヒント**：結婚定理を適用できる様な 2 部グラフを考えよ。

演習問題 *__4.6__　非負の実数を要素に持つ行列 Q が，各行の要素の総和が 1 で各列の要素の総和も 1 のとき**重確率行列**という。また 0 と 1 の成分からなる行列が各行各列にちょうど 1 個の 1 を持つとき**置換行列**という。置換行列は重確率行列である。結婚定理の応用として次を示すことを考える。

(1) 重確率行列は正方行列である。

(2) 重確率行列は置換行列の凸 1 次結合で表される。即ち重確率行列 Q に対し置換行列 $P_1, \ldots, P_k$ と非負実数 $c_1, \ldots, c_k$ で $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i = 1$ となるものが存在して $Q = c_1P_1 + \cdots + c_kP_k$ となる。

そのために重確率行列 $Q = (q_{ij})$ に対し次の様にグラフ G_Q を決める。ただし Q の次数は n とする。$X = \{x_1, \ldots, x_n\}, Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ とおき $V = X \cup Y$ とする。$q_{ij} > 0$ となっているとき $x_iy_j \in E$ と定め，$G_Q = (V, E)$ とする。このとき次を順に示すことにより，問題を解け。

(1) G_Q は 2 部グラフであり完全マッチングを持つ。

(2) マッチング M に対し次のように置換行列 P を定める；$e = x_iy_j \in M$ のとき $p_{ij} = 1$，それ以外は $p_{ij} = 0$。このとき $Q' = (1 + c)Q - cP$ は重確率行列であることを示せ。

(3) 0 でない成分の個数についての帰納法で問題 (2) を示せ。