グラフ理論要綱 #5　　2005–7–15　　河野

5　ネットワークと流れ

今まではグラフの辺に向きは考えていなかった。この節で扱う「流れ」では向き付きの辺を考える必要がある。

$G = (V, E)$ をグラフとする。$E \subseteq [V]^2$ であった。V^2 から $[V]^2$ への写像 π を $\pi(x, y) = xy$ で定義する。辺 $e = xy$ に向きを指定するとは (x, y) または (y, x) の一方を指定することと考えることができる。

$r : V^2 \to V^2$ を $r(x, y) = (y, x)$ とする。$\ell \in V^2$ に対し $\ell^{-1} = r(\ell)$ と書くことにする。$\pi^{-1}(E)$ を $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ と表す。$F \subseteq \overrightarrow{\mathrm{E}}$ に対し

$$F^{-1} = \left\{ \ell^{-1} \,\middle|\, \ell \in F \right\}$$

と定義する。$X, Y \subseteq V$ に対し

$$F(X, Y) = \{ (x, y) \in F \mid x \in X, y \in Y, x \neq y \}$$

と定義する。X, Y 等が singleton(1 点からなる集合) のときは $F(\{x\}, Y)$ などを $F(x, Y)$ と書く。また $F(x) = F(x, V)$ とする。

グラフ G の流れとは G の (向きが指定されている) 各辺にある値を割り振ることと考えることができる。「値」は一般には実数であるが，ここでは一般の可換群に値を持つものを考えておく。即ち H を可換群とするとき，任意の $(x, y) \in \overrightarrow{\mathrm{E}}$ に対し $f(x, y) = -f(y, x)$ を満たす写像

$$f : \overrightarrow{\mathrm{E}} \to H$$

を流れと考えることができる。一般の f[(1)] に対し

$$f(X, Y) = \sum_{(x,y) \in \overrightarrow{\mathrm{E}}(X,Y)} f(x, y)$$

と定義する。$f(x, Y) = f(\{x\}, Y)$ 等も前の記号と同様である。

$f : V^2 \to H$ が次の 2 つを満たすとき，G 上の (H に値をとる) **循環流** (*circulation*)(または H–循環流) という；

(F1) $\forall (x, y) \in \overrightarrow{\mathrm{E}}$; $f(x, y) = -f(y, x)$

(F2) $\forall v \in V$; $f(v, V) = 0$

(F2) の性質をキルヒホッフ則という事もある。即ち $f(x, V) = \displaystyle\sum_{y \in N(x)} f(x, y) = 0$ となるとき f は x において「キルヒホッフ則をみたす」という。

命題 5.1 f が (F1) を満たすとき，任意の $X \subseteq V$ に対して $f(X, X) = 0$ となる。

f が (F2) を満たすとき，任意の $X \subseteq V$ について $f(X, V) = 0$ となる。

演習問題 5.1　命題 5.1 を示せ。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(1) $f(x, y) = -f(y, x)$ を満たさない場合も考えるときがある。

命題 5.2 f を循環流とすると，任意の $X \subseteq V$ に対し，$f(X,\overline{X})=0$ が成立する。

系 5.3 f を循環流，$e=xy$ を橋とすると，$f(x,y)=0$ が成り立つ。

演習問題 5.2　命題 5.2 を示せ。
演習問題 5.3　系 5.3 を示せ。

$G=(V,E)$ をグラフとし，$s,t \in V$ を固定した 2 頂点$^{(2)}$，$c:\overrightarrow{\mathrm{E}} \to \boldsymbol{N}$ を写像とする。このとき c を**容量関数**といい，$N=(G,s,t,c)$ を**ネットワーク**という。関数 $f:\overrightarrow{\mathrm{E}} \to \boldsymbol{R}$ が次の 3 条件を満たすとき，N 上の**流れ**と呼ぶ；
(F1) 任意の $x \neq y \in V$ に対し $f(x,y)=-f(y,x)$
(F2') 任意の $v \in V-\{s,t\}$ に対し $f(v,V)=0$
(F3) 任意の $\ell \in \overrightarrow{\mathrm{E}}$ に対し $f(\ell) \leqq c(\ell)$
f の値がすべて整数のとき，f を**整数流**という。$S \subseteq V$ が $s \in S$ かつ $t \in \overline{S}$ となっているとき，$(S,\overline{S})$ を N の**カット**と呼び，$c(S,\overline{S})$ をこのカットの**容量**という。
(F2) が成立していないので，$S \subseteq V$ に対し $f(S,\overline{S})=0$ は成立しないが，次が成立する。

命題 5.4 N の任意のカット $(S,\overline{S})$ に対し，$f(S,\overline{S})=f(s,V)$ が成立する。即ち $f(S,\overline{S})$ はカットによらず定まる。

証明

$$\begin{aligned} f(S,\overline{S}) &= f(S,V)-f(S,S) \\ &= f(S,V) \\ &= f(s,V)+\sum_{v \in S-\{s\}} f(v,V) \\ &= f(s,V) \end{aligned}$$

∎

命題 5.4 における共通の値 $f(S,\overline{S})$ を f の**流量**と呼び，$|f|$ で表す。(F3) により N の任意のカット $(S,\overline{S})$ に対し

$$|f|=f(S,\overline{S}) \leqq c(S,\overline{S})$$

が成立する。よって流れの流量はカットの容量の最小値を超えることはない。次の最大流最小カット定理は，この上界がある流れによって実現されることを示している。

定理 5.5 任意のネットワークにおいて，流れの流量の最大値は，カットの容量の最小値に等しい。

証明　$G=(V,E)$ とし，ネットワークを $N=(G,s,t,c)$ とする。流れ $f_i:\overrightarrow{\mathrm{E}} \to \boldsymbol{Z}$ を

$$|f_0|<|f_1|<|f_2|<\cdots$$

となる様に構成してゆく。
最初は f_0 の構成だが，すべての向き付き辺 $\ell \in \overrightarrow{\mathrm{E}}$ に対し $f_0(\ell)=0$ と定義する。この f_0 は整数流になっている。

(2) s,t という名前を選んだのは source,terminal からきている。

f_n が整数流で $|f_n|$ がカットの容量の最小値より真に小さいとき，$|f_n| < |f_{n+1}|$ となる整数流を構成できることを示す。このことが示されれば，ある有限の n でカットの最小値に達することが分かり証明が終る。

次の条件を満たす点 v の全体を S と定義する；ある s–v 道 $x_0e_1x_1\cdots e_kx_k$ で

$$\text{任意の } i \leqq k \text{ に対して, } f(e_i) < c(e_i) \text{ が成立する。}$$

(s–v 道であるから $s = x_0, v = x_k$ である。)

$t \notin S$ なら $(S,\overline{S})$ は N のカットである。このとき $e = (x,y) \in \overrightarrow{\mathrm{E}}(S,\overline{S})$ に対し $f(e) < c(e)$ なら上の条件を満たす s–x 道 P を Pey まで延長でき，$y \in S$ となり矛盾，よって $f(e) = c(e)$ このとき

$$|f_n| = f_n(S,\overline{S}) = \sum_{(x,y)\in\overrightarrow{\mathrm{E}}(S,\overline{S})} f(x,y) = \sum_{(x,y)\in\overrightarrow{\mathrm{E}}(S,\overline{S})} c(x,y) = c(S,\overline{S})$$

となり $|f_n|$ がカットの最小値より小さいことに矛盾，よって $t \in S$ である。

このときある s–t 道 $P = x_0e_1x_1\cdots e_kx_k$ で上の条件を満たすものが存在する。

$$\varepsilon = \min\{\, c(e_i) - f(e_i) \mid\ i = 1,\ldots,k\,\}$$

と定義すると，仮定より $\varepsilon > 0$ である。このとき f_{n+1} を次の様に定義する；$f_{n+1}(x_{i-1},x_i) = f_n(x_{i-1},x_i) + \varepsilon$, $f_{n+1}(x_i,x_{i-1}) = f_n(x_i,x_{i-1}) - \varepsilon$ とし，それ以外の e に対しては $f_{n+1}(e) = f_n(e)$ とする。f_{n+1} が整数流になるのは明らか。$f_n(x_0,x_1) < f_{n+1}(x_0,x_1)$ なので，

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}| &= f_{n+1}(s,V) = \sum_{v\in N(s)} f_{n+1}(s,v) \\
&= \sum_{v\in N(s)-\{x_1\}} f_{n+1}(s,v) + f_{n+1}(s,x_1) \\
&= \sum_{v\in N(s)-\{x_1\}} f_n(s,v) + f_{n+1}(s,x_1) \\
&> \sum_{v\in N(s)-\{x_1\}} f_n(s,v) + f_n(s,x_1) \\
&= \sum_{v\in N(s)} f_n(s,v) = f_n(s,V) \\
&= |f_n|
\end{aligned}$$

となり目的の f_{n+1} が構成できた。∎

この定理の証明をみると最大流量を実現するアルゴリズムが存在ずることが分かる。

演習問題 5.4 このアルゴリズムがどのようなものであるかをきちんと述べよ。またネットワークを 1 つ自分で選び，そのネットワークにアルゴリズムを適用してみよ。