

4 平面グラフと4色問題

4色問題とは地図で隣の国と違う色を塗るとき，どんな地図でも4色で塗れるかという問題である。地図業者の間では経験的に知られていた事らしいが，数学的に問題にされたのは19世紀後半のことである。

何人かの数学者がそれを証明したと論文を発表したが，その後間違いを含んでいることが分かった。その中ではケンプが最も有名かもしれない。彼の方法を用いると5色定理が証明できる。20世紀前半を通じてグラフ理論の未解決問題の最も有名な問題であった。

1976年にアップルとハーケンが computer を用いる証明を論文として発表した。この論文に対しては問題も指摘されたが，証明そのものは「正しい」と認められているようである。

4色問題を考えるため，最初にグラフの「表現」を定義する。グラフ $G = (V, E)$ に対し $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ が以下を満たすとき G の表現または幾何学的表現と呼ぶ：

- (1) $\tilde{v} \in \tilde{V}$ はユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の点である。
- (2) $\tilde{e} \in \tilde{E}$ は \mathbb{R}^3 内の単純曲線である。ここで単純曲線とはある閉区間から \mathbb{R}^3 への単射 $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し $\tilde{e} = c([a, b])$ となっていることをいう。 $c(a), c(b)$ を \tilde{e} の端点という。
- (3) \tilde{e} の端点 \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 は \tilde{V} の元である。また $\tilde{e} \cap \tilde{V} = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$ を満たす。
- (4) $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \in \tilde{E}$ に対し $\tilde{e}_1 \neq \tilde{e}_2$ ならば $\tilde{e}_1 \cap \tilde{e}_2 \subseteq \tilde{V}$ である。
- (5) 全単射 $f: V \rightarrow \tilde{V}$ および全単射 $g: E \rightarrow \tilde{E}$ が存在して

$$vw \in E \iff f(v), f(w) \text{ は } g(vw) \text{ の端点}$$

が成立する。

演習問題 7 任意のグラフが幾何学的表現をもつことを示せ。

グラフ $G = (V, E)$ の表現 $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ に対し $\bigcup_{\tilde{e} \in \tilde{E}} \tilde{e}$ を考える。混乱のおそれのないときは $\tilde{G} = \bigcup_{\tilde{e} \in \tilde{E}} \tilde{e}$ とも書くことにする。 \tilde{G} は \mathbb{R}^3 内の幾何的集合であるが，これが特に $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ に含まれ

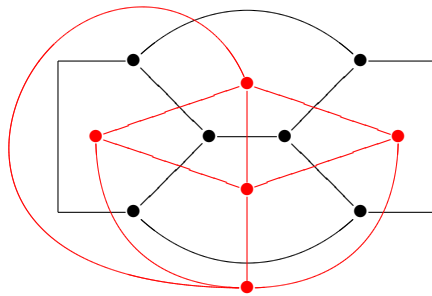
講義のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> (Renandi から迎れる) においてある。

ているとき, \tilde{G} は平面的な実現であるという。 $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ は平面 \mathbb{R}^2 と同相なので $\tilde{G} \subseteq \mathbb{R}^2$ と考えてもよい。

G が平面的な実現 \tilde{G} を持つときグラフ G が平面的 (planar) であるという。平面的な実現 \tilde{G} をグラフとみなし, 平面グラフ (plane graph) と呼ぶことにしよう。

\tilde{G} を平面グラフとするとき, $\mathbb{R}^2 - \tilde{G}$ の各連結成分を \tilde{G} の面という。

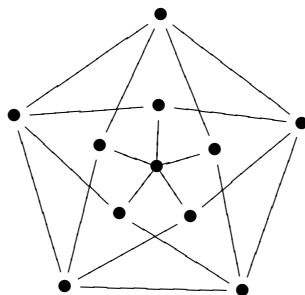
平面グラフを「地図」と思いたいのであるが, 「地図」のグラフには多重辺が存在する場合がある。そこでしばらくは多重辺も認めて多重グラフを考える。多重平面グラフ \tilde{G} に対しその双対グラフ (dual graph) を次の様に定義する。 \tilde{G} の各面に対しその面の中に頂点を1つとる。2つの面が辺で接しているとき, その辺と交わる辺をとり, 面に対応する頂点を結ぶ。このようにして平面グラフ \tilde{H} を構成することができる。このグラフを \tilde{G} の双対グラフという。



平面グラフ \tilde{G} とその双対グラフ \tilde{H} を考える。グラフ \tilde{G} の面に色を塗ることはグラフ \tilde{H} でいうと頂点に色を塗ることに対応する。そこで次を定義する。

定義 3 $G = (V, E)$ をグラフとする。 V から $C(k) = \{1, 2, \dots, k\}$ への写像 $c : V \rightarrow C(k)$ で $xy \in E$ のとき $c(x) \neq c(y)$ を満たすものを G の k -彩色 (k -coloring) といい, この様な c が存在するとき G は k -彩色可能であるとう。この様な k の最小値を G の彩色数 (chromatic number) といい $\chi(G)$ で表す。

演習問題 8 次のグラフの彩色数はいくらか。



地図「グラフ」の双対グラフは一般に多重グラフになるが次が成立するので、多重辺のない「グラフ」で考えればよいことが分かる。

命題 4 G を多重グラフとする。 G が多重辺を含むとき、各多重辺に対し、1本を残して他の辺を除いてできるグラフを G' とすると、 $\chi(G) = \chi(G')$ が成立する。

4色問題は次の様に定式化できる。

平面的グラフ G に対して $\chi(G) \leq 4$ が成立するか。

4色問題は肯定的に解かれていて4色定理と呼ばれるが、ここでその証明を与えることは勿論できない。ここでは次の5色定理を証明する。

定理 5 5色定理 任意の平面グラフは5-彩色可能である。

この定理の証明のため、平面グラフの頂点・辺・面の数に関する次の定理を必要とする。

定理 6 [Euler の定理] G を連結なグラフとし、頂点の数を p 、辺の数を q 、面の数を r とするとき $p - q + r = 2$ が成立する。

定理 37 の証明には次の命題を使用する。ここで木 (*tree*) とは連結でサイクルを含まないグラフを意味する。

命題 7 $T = (V, E)$ をグラフとし、頂点の個数を p 、辺の個数を q とするとき、 T が木である必要十分条件は $p - q = 1$ である。

証明 p についての帰納法で示す。 $p = 1$ のときは $q = 0$ しかありえない。このときグラフは木である。 p より小さいとき成立を仮定する。 $T = (V, E)$ には葉 (次数 1 の頂点) が存在する (演習問題 9 参照)。その点を v とし、 v に接続する辺を e とする。このとき $T' = (V - \{v\}, E - \{e\})$ も木である。この木の頂点数は $p - 1$ で、辺数は $q - 1$ である。帰納法の仮定から、 $(p - 1) - (q - 1) = 1$ となり $p - q = 1$ が成立する。

逆に $p - q = 1$ とする。 $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2q = 2(p - 1)$ である。すべての頂点の次数が 2 以上なら $\sum_{v \in V} \deg(v) \geq 2p$ となるので次数 1 の頂点 v が存在する。その点を v とし、 v に接続する辺を e とする。こ

のとき $T' = (V - \{v\}, E - \{e\})$ は $(p-1) - (q-1) = 1$ を満たしている。帰納法の仮定から、 T' は木である。よって T も木である。■

演習問題 9 木には次数 1 の頂点が存在することを示せ。

グラフ $G = (V, E)$ と $v \in V$ に対し $G - v$ を次で定義する：

$$E' = \{e \in E \mid e \text{ は } v \text{ を端点に持たない}\}$$

とすると $G - v = (V - \{v\}, E')$ と定義する。

辺 $e \in E$ に対して $G - e = (V, E - \{e\})$ で定義する。2つの定義の非対称性に注意。

定理 37 の証明： 定理 37 は命題 38 を出発点とする q に関する帰納法で証明できる。

p を固定し q についての帰納法で示す。 $q < p - 1$ のときグラフは連結にならない。よって出発点は $q = p - 1$ である。このとき命題 38 により $G = (V, E)$ は木である。平面上の木は平面を 2 つ以上に分割しない。よって面の数は 1 である。このとき $p - q + r = 2$ が成立する。

$q \geq p$ のとき、命題 38 により G は木ではない。よってサイクル C とその上の辺 e が存在する。 e を境界とする面は 2 つ存在する。即ち e を境界とする面を X_1, X_2 とすると、 $X_1 \neq X_2$ である。 $G' = G - e$ とすると、 G' は連結な平面グラフで $|G'| = p$, $\|G'\| = q - 1$ である。面は G の面 X_1, X_2 以外は同じで X_1 と X_2 が同じ面 X になっている。よって G' の面の数は $r - 1$ である。帰納法の仮定より $p - (q - 1) + (r - 1) = 2$ が成立するので、 $p - q + r = 2$ が成立する。■

演習問題 10 オイラーの定理は連結でないグラフにたいしてはそのままでは成立しない。しかし少し変えてやると連結でないグラフにも拡張できる。連結でないグラフのいくつかの例に対し(頂点の数)−(辺の数)+(面の数)を計算し、一般の形を予想し、それを証明せよ。

定理の証明の途中で次の定理を断わらずに用いている。この定理は当り前の様に見えるがきちんと証明しようとするとなかなか難しい。

ジョルダンの閉曲線定理：平面上の単純閉曲線は平面を 2 つに分割する。

定理 37 から次が従う。オリジナルの証明はユークリッドの「原論」(今から 2 千数百年前の本)に書かれており、角度の議論を行っている。この証明は「組合せ」的な議論のみで構成されている。

定理 8 正多面体は5種類しかない。

証明 正多面体の各面が m 角形で、各頂点に n 個辺が集まっているとする。正多面体の頂点と辺からなるグラフは平面的である。よって頂点の数を p 、辺の数を q 、面の数を r とすると $p - q + r = 2$ が成立している。 m 角形より $mr = 2q$ が成立。頂点の周りの状況より $np = 2q$ が成立。よって $p - q + r = 2$ に代入すると $q(\frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 1) = 2$ が成立する。よって $\frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 1 > 0$ が成立する。また $m \geq 3$ より $n \leq 5$ 、 $n \geq 3$ より $m \leq 5$ が成立する。よって可能性は $(m, n) = (5, 3), (4, 3), (3, 5), (3, 4), (3, 3)$ の5種類である。それぞれの場合 $(p, q, r) = (20, 30, 12), (8, 12, 6), (12, 30, 20), (6, 12, 8), (4, 6, 4)$ である。■

命題 9 $|G| \geq 3$ である平面グラフ G に対し $\|G\| \leq 3|G| - 6$ が成立する。

証明 平面グラフ G の面で3角形でないものが存在するとき、対角線を加える事により各面が3角形で頂点の数は G と同じで辺の数は G 以上のグラフ G' が存在する。 G' に対し $\|G'\| = 3|G'| - 6$ を示せば、 $\|G\| \leq \|G'\| = 3|G'| - 6 = 3|G| - 6$ となり命題が示される。 G' の頂点、辺、面の数をそれぞれ p, q, r とすると、面がすべて3角形より $3r = 2q$ が成立する。これをオイラーの公式に代入すると $2 = p - q + r = p - q + \frac{2}{3}q = p - \frac{1}{3}q$ なのでOK。■

$G = (V, E)$ と $S \subseteq V$ に対し $E[S] = \{xy \in E \mid x, y \in S\}$ とするとき

$$G[S] = (S, E[S])$$

を G における S の誘導部分グラフという。

定理 5 の証明： $|G|$ についての帰納法で示す。 $|G| \leq 5$ については定理は成立する。今 $|G| \geq 6$ とし、 $|G|$ より小さいグラフについて成立を仮定する。グラフ $G = (V, E)$ とする。命題 9 より G の平均次数 $d(G)$ は

$$\begin{aligned} d(G) &= \frac{1}{|G|} \sum_{v \in V} \deg(v) = \frac{2\|G\|}{|G|} \\ &\leq \frac{6|G| - 12}{|G|} = 6 - \frac{12}{|G|} < 6 \end{aligned}$$

なので次数5以下の頂点 x が存在する。帰納法の仮定より $H = G - x$ は5-彩色可能である。

x の次数が 4 より小さければ G は 5-彩色可能なので, x の次数は 5 としてよい。 $N_G(x)$ の頂点 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 は x を中心に時計回りに並んでいて, v_i は i で彩色されているとする。 V_i を i で彩色された H の頂点とする。 $H_{ij} = H[V_i \cup V_j]$ とし, C_{ij} を v_i を含む H_{ij} の連結成分とする。

C_{ij} の頂点の彩色を入れ替えても依然として彩色になることに注意する。

v_j が C_{ij} を含まないとする。 このとき C_{ij} の色を入れ替えを行うと, v_i と v_j は j で彩色されている。 このとき $c(x) = i$ とすると, これは G の 5-彩色を与える。

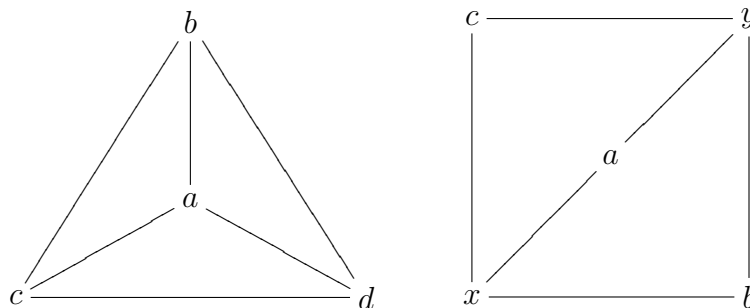
よって各 C_{ij} は v_j を含む。

C_{13} を考える。 C_{13} は v_1, v_3 を含んでいるので v_1 から v_3 への C_{13} 内の道 P が存在する。 このとき xPx はサイクルになり, 平面を 2 つに分離する。 一方は v_2 を含んでおり, 他方は v_4 を含んでいる。 C_{24} は v_2, v_4 を含まなくてはならないが, C_{13} と交わり矛盾。 ■

平面的でないグラフについて考えよう。 n 頂点で任意の 2 頂点をつなぐ辺が存在するグラフを完全グラフ (complete graph) といい K^n で表す。 A, B を集合とし, $V = A \cup B$ を頂点集合とする。 A の任意の頂点と B の任意の頂点を結ぶ辺が存在するが, A の点同士, B の点同士を結ぶ辺は存在しないグラフを完全二部グラフ (complete bipartite graph) と呼ぶ。 $\#A = m, \#B = n$ のとき $K_{m,n}$ と書く。

命題 10 K^5 および $K_{3,3}$ は平面的グラフではない。

証明 $K = (V, E), V = \{a, b, c, d, e\}$ とする。 K^5 が平面的だとすると, $K^5 - e$ は下図の様になっている。 $K^5 - e$ は平面を 4 つの領域に分ける。 そのどれかの領域に頂点 e があるが, どこにあっても結べない頂点が存在するので矛盾。



$A = \{a, b, c\}, B = \{x, y, z\}$ とするとき $K_{3,3}$ の頂点集合を $V = A \cup B$ とする。 $K_{3,3}$ が平面的だとすると, $K_{3,3} - z$ は上図の様になっている。

$K_{3,3} - z$ は平面を 3 つの領域に分ける。そのどれかの領域に頂点 z があるが、どこにあっても結べない頂点が存在するので矛盾。 ■

$G = (V, E), H = (W, F)$ をグラフとする。 $W \subseteq V, F \subseteq E$ となるとき H を G の部分グラフ (subgraph) といい、 $H \subseteq G$ と書く。部分グラフ H が非平面的なとき G も非平面的である。

グラフ $G = (V, E)$ のある辺を $xy \in E$ とする。 $p \notin V$ とするとき $V' = V \cup \{p\}, E' = E - \{xy\} \cup \{xp, py\}$ とするとき $G' = (V', E')$ を G の細分 (subdivision) と呼ぶ。細分を何回か行って得られるグラフも細分と呼ぶ。

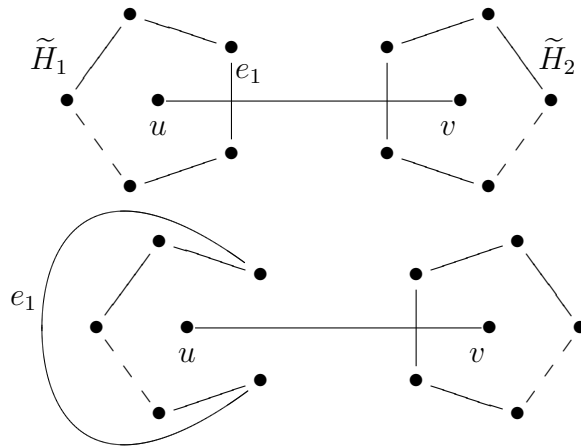
$K^5, K_{3,3}$ は非平面的グラフなのでそれらの細分を部分グラフとして含むグラフは非平面的である。この逆も成立しクラトフスキー (Kuratowski) の定理として知られている。

定理 11 グラフ G が平面的である必要十分条件は部分グラフとして K^5 または $K_{3,3}$ の細分を含まないことである。

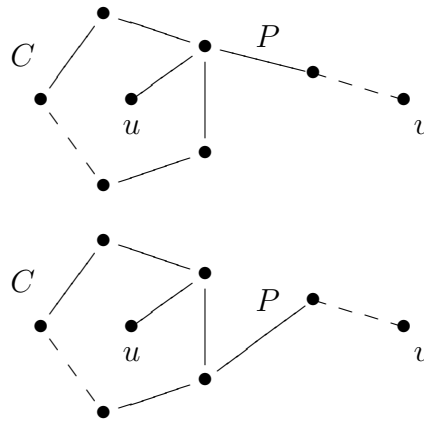
証明 $G = (V, E)$ が非平面的グラフのとき K^5 または $K_{3,3}$ の細分を含むことを証明する。グラフが非連結の場合はある連結成分が非平面的なので G は連結を仮定する。

ある辺 $e \in E$ に対し $G - e$ が非平面的グラフのときは $G - e$ が K^5 または $K_{3,3}$ の細分を含むことを証明すれば G も含むことが分かる。よって $H = G - e$ は平面的と仮定してよい。 $\tilde{H} = (\tilde{V}, \tilde{E}')$ を平面グラフとする。取り除かれた辺は uv とする。

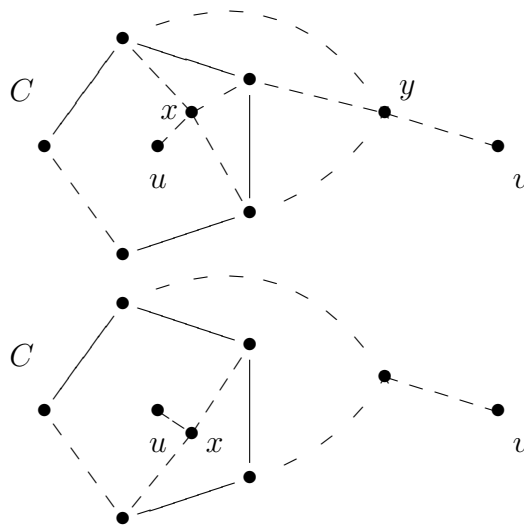
最初に H が連結であることを示す。 H が連結でないとする、 \tilde{H} は 2 つの部分グラフ \tilde{H}_1, \tilde{H}_2 に分かれる。一方が u を含み、他方が v を含む。 u と v を結ぶ曲線を \tilde{H} との交点が少なくなるように選ぶと、 uv と交わる辺も高々 1 回である。そのような辺を e_1, \dots, e_k とする。このとき H の表現 \tilde{H} を変更して交点を解消できる。このとき G が平面的になるので矛盾、よって H は連結である。



\tilde{H} は連結なので u と v を結ぶ \tilde{H} 内の道 P が存在する。 \tilde{H} 内の u と v を分離するサイクルが存在しなければ \tilde{H} と交わらない arc で u と v を結ぶことができ、 G の平面的表現が得られるので、サイクルが存在する。それを C とする。 P と C は交わるので次図の様になっている。



この \tilde{H} が次図の様な部分を含むことを示せば証明される。

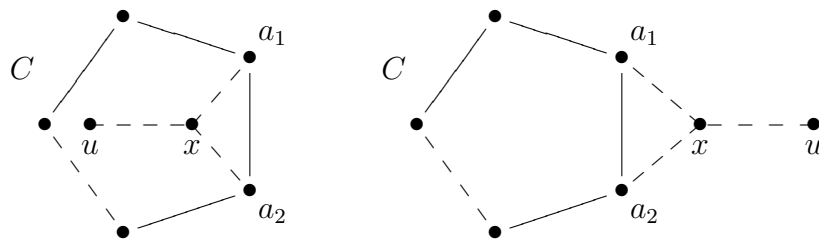


u から C への道で最初に C にぶつかる頂点 u -end 頂点と呼ぶ。このような道をすべて考え、すべての u -end 頂点の集合を A とする。 $\#A = m$ とする。

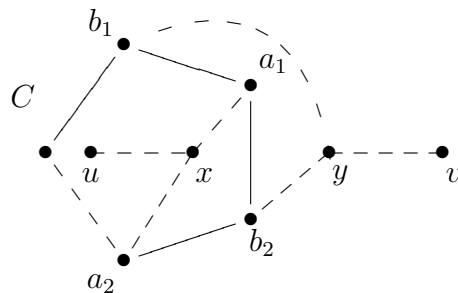
v から C への道で最初に C にぶつかる頂点 v -end 頂点と呼ぶ。このような道をすべて考え、すべての v -end 頂点の集合を B とする。 $\#B = n$ とする。

$m \geq 2, n \geq 2$ としてよいことを示す。 $m = 1$ とすると \tilde{H} の C の内部 (u の含まれる方) にある部分を折り返して C の外部に出すことができる。この操作で \tilde{H} は変化するが、 H の表現であることは変わらない。このとき C は u と v を分離しない。よって別のサイクル C' が存在する。この操作で u と v を分離するサイクルの数は減るので、この議論を続ければ $m \geq 2$ となるサイクルが見つかる。同様の議論を v -end 頂点について行えば $n \geq 2$ が分かる。

u から C へ素な道が 2 つ以上存在するときは $x = u$ とおく。 u から C への素な道が 2 つ以上存在しないときは u から C への道を 1 つ考え、道に沿ってその頂点から出発する C への道で素なものが 2 つ以上ある頂点を探す。その様な頂点が存在しないと $m = 1$ になるので、その様な頂点は存在する。これを x とおく。 v についても同様な議論を行い頂点 y を選ぶ。



$m = 2$ の場合を考える。 $A = \{a_1, a_2\}$ とする。 $C - A$ は 2 つの arc に分かれるが、その少なくとも一方の arc に B の点が存在しないとする。このとき C の内部を折り返して別の表現をつくることができる。よってこのときそれぞれの arc 内に B の点が存在する。よって下図の様になっており、 G の中に $K_{3,3}$ の細分が存在する (演習問題：下図に辺 uv を加えたグラフの中に $K_{3,3}$ の細分を実際に発見せよ)。よって $m \geq 3$ としてよい。

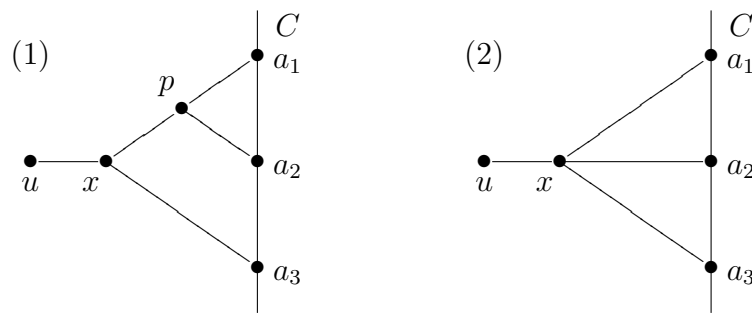


v に関して同様の議論を行うと $n \geq 3$ としてよいことが分かる。

$m > 3$ のときは $m = 3$ となる G の部分グラフ G' を考える。 G' について証明すれば、 G' に含まれる $K^5, K_{3,3}$ の細分は G にも含まれることが分かるので $m = 3$ の場合を示せば十分である。同様に $n = 3$ の場合を示せば十分である。

$A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}$ とする。最初に A に属さない B の元があるときを考える。その元を b_1 とする。 b_1 は a_1 と a_2 の間にあるとしてよい。 $C - \{a_1, a_2\}$ は 2 つの成分に分かれるが b_1 を含まない成分を L とする。 L に B の元がなければ、外部を内部にひっくり返して移動することができ、 u, v を分離するサイクルが 1 つ減る。今までの議論を繰り返すことにより、 L に B の元があるとしてよい。これを b_2 とする。このとき x, y, a_1, a_2, b_1, b_2 を頂点とする。 $K_{3,3}$ の細分が \tilde{G} 内に存在する。

よって残っているのは $A = B$ の場合だけである。 C の内部は次の 2 つのタイプがある。



C の外部も 2 つのタイプがある。両方ともにタイプ (2) のとき x, y, a_1, a_2, a_3 を含む、 K^5 の細分が存在する。

両方とも (1) タイプ、または一方がタイプ (1) で他方がタイプ (2) のときは $K_{3,3}$ の細分が存在する (演習問題： これを実際に確かめよ)。 ■