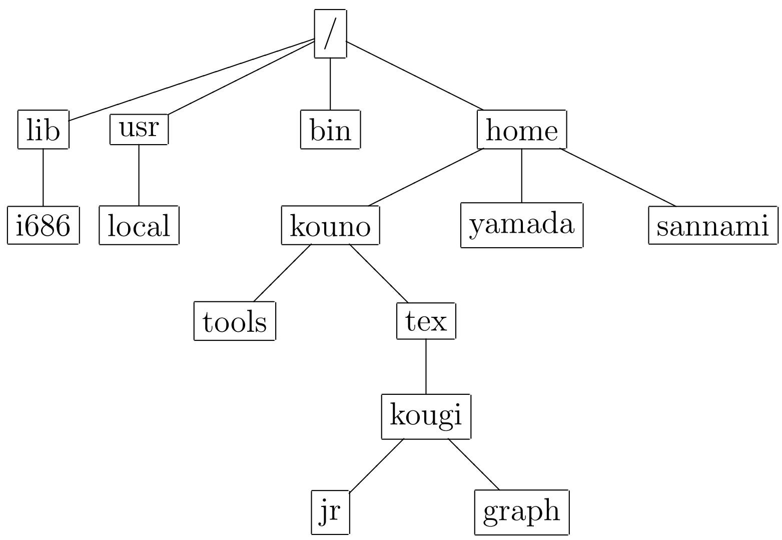
# グラフ理論要綱 #1

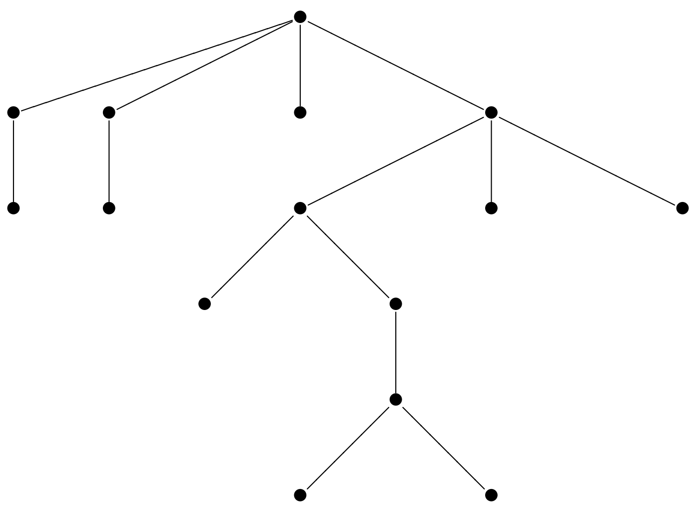
## 0　はじめに

「情報の取得と解析」を学んで来たが，ここでは「情報の表現」としてのグラフ理論を学ぶ。

次の図は OS が unix である computer の directory の一部を表示したものである。subdirectory であることを親 directory からその subdirectory へ線分を引くことで表している。

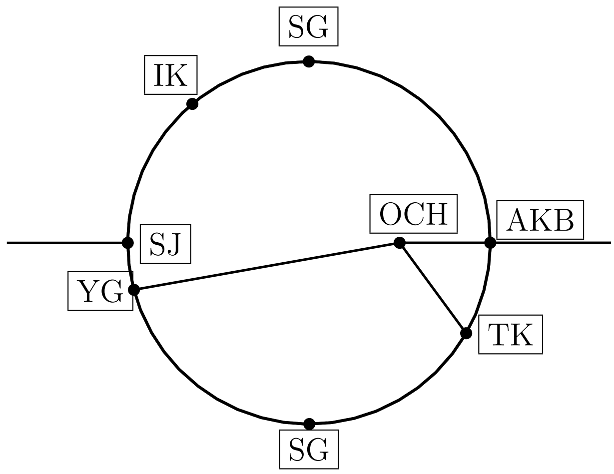



directory を点で置き換えると，通常我々が見るグラフが登場する。



講義のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html(Renandi から辿れる) においてある。

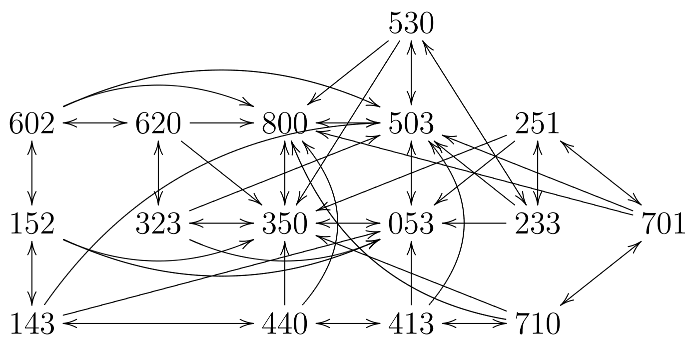
次の図は東京の山手線，中央線，総武線の一部の地図である。方角等は正確ではないがつながり方は正確なので，電車で移動するためには十分である。




「はじめに」の最後はパズルを考える。

$8\ell$ 入りの容器に水がいっぱい入っている。他に $5\ell$ 入り，$3\ell$ 入りの容器がそれぞれ 1 個ある。水を $4\ell$ ずつに分けたいとする。どのようにすればよいか。

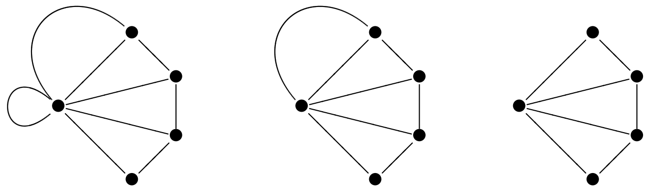
試行錯誤でやればできるが，ここでは向きつきグラフを使って考える。$8\ell, 5\ell, 3\ell$ の容器に入っている水の量がそれぞれ $a, b, c$ のときその状態を $abc$ と表す。最初の状態は 800 である。$5\ell$ 容器に $5\ell$ 移動すると状態は 350 となる。800 から 350 へ移動可能なので矢印を書く。この様な状態・矢印をすべて書き出すと次のようになる。




これらの他にもグラフで表現することに適したデータは沢山ある。この講義ではグラフ理論の基礎に関して述べる。

# 1　グラフの定義

どの範囲のものをグラフを考えるかということに関して 3 つの立場がある。グラフを最も広い範囲で考えるのは，1 つの頂点から自分自身へ結ぶ辺 (loop と呼ばれる) を認める立場である。2 つ目は loop は認めないが，多重辺 (両端点が同じである 2 つの辺) は認める立場。3 番目は loop も多重辺も認めない立場である。



上の例でいうと，すべてグラフと認めるのが一番目，真ん中と右の 2 つをグラフと認め，左を認めないのが 2 番目の立場，右だけをグラフと認め，他を認めないのが 3 番目の立場である。

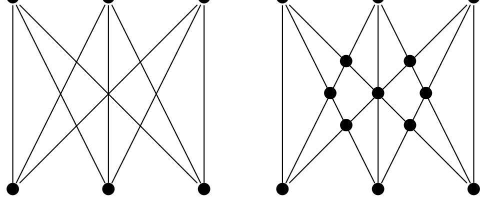
ここでは 3 番目の立場をとる。

3 番目の立場では loop を含まないが多重辺をもつ「グラフ」を**多重グラフ** (*multigraph*) と呼ぶ。また loop をもつ「グラフ」(多重辺を含んでもよい) を**準グラフ** (*pseudograph*) という。

辺に**向き** (*direction*) をつけて考えることもある。このようなグラフを**有向グラフ** (*directed graph*) という。ネットワークなどを考えるときは有向グラフを考える。この講義では有向グラフは扱わないことにする。

今まで「グラフ」という言葉を既知のものとして扱ってきたが，グラフに関して議論するためには，グラフをきちんと定義する必要がある。

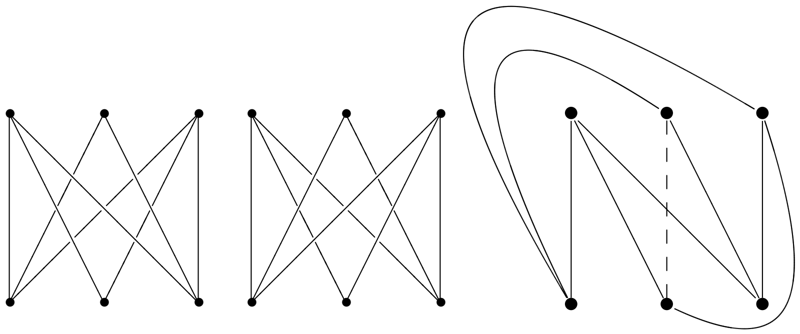
「グラフ」はさしあたり「頂点」と呼ばれる点が「辺」と呼ばれる線で結ばれた図形と考えることができる。しかし図形をグラフと考えると種々の問題が発生する。



上図左のグラフは 6 つの頂点と 9 つの辺をもつグラフであり，交点のように見える 5 つの点は頂点ではないと考える。即ち上図右と

は異なるグラフと考える。そうだとするなら図形でグラフを実現するには「交点」で辺に上下をつける必要がでてくる。

次図左と中央は上下をつけたものであるが，上下のつけ方は異なっている。これらを異なったグラフと考えるのか。また次図右のようになるべく交点を減らしたグラフは前と異なるものと考えるのか。



そこでグラフの定義は幾何的 (図形的) にではなく，組み合わせ的に定義する。ただし人間は視覚的な動物なので，図形のグラフはその「表現」と考え，有効に使用する。

**定義 1 グラフ** (graph) $G$ とは有限集合 $V$ と $V$ の 2 元からなる部分集合全体の集合 $[V]^2$ のある部分集合 $E$ の組 $G=(V,E)$ の事と定義する。

$V$ の元を**頂点** (vertex) と呼び，$E$ の元を**辺** (edge) と呼ぶ。

$V=\{a,b,c,x,y,z\}$ とする。$e_1=\{a,x\}, e_2=\{a,y\}, e_3=\{a,z\}, e_4=\{b,x\}, e_5=\{b,y\}, e_6=\{b,z\}, e_7=\{c,x\}, e_8=\{c,y\}, e_9=\{c,z\}$ とおき $E=\{e_1,\ldots,e_9\}$ とするとき $G=(V,E)$ とする。

図の「グラフ」はすべてこのグラフ $G$ の表現と考える。

$e=\{x,y\}$ のとき $e=xy$ と書いて ($xy=yx$ であることに注意), $x$(または $y$) は $e$ に**接続している** (incident) といい，$x$ と $y$ は**隣接している** (adjacent) という。2 つの辺 $e\neq f$ が共通の端点をもつとき**隣接する**という。

グラフ $G=(V,E)$ の頂点集合，辺集合をそれぞれ

$$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\},\quad E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$$

とする。$n\times m$ 行列 $M(G)=(m_{ij})$ を

$$\begin{cases} m_{ij}=1 & v_i\text{は }e_j\text{の辺} \\ m_{ij}=0 & v_i\text{は }e_j\text{の辺でない}\end{cases}$$

と定義する。この行列を $G$ の**接続行列** (*incident matrix*) という。

$n \times n$ 行列 $A(G) = (a_{ij})$ を

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & v_i v_j \in E \\ a_{ij} = 0 & v_i v_j \notin E \end{cases}$$

と定義する。この行列を $G$ の**隣接行列** (*adjacent matrix*) という。

これらは computer 上でグラフを表現する 1 つの方法である。

**演習問題 1**　$A = (a_{ij})$ をグラフの頂点集合を隣接行列とする。このとき $A^2 = AA$ の $(i, j)$ 成分が何を意味するか考えよ。また一般に自然数 $k$ に対し $A^k$ の $(i, j)$ 成分が何を意味するか考えよ。

# 2　グラフ理論の定理から

グラフ理論を概観するため代表的な幾つかの定理を紹介しよう。

- グラフ $G = (V, E)$ のなかの**歩道** (*walk*) $W$ とは頂点の列 $v_0 v_1 \cdots v_n$ の事，ただし $e_i = v_{i-1} v_i \in E$ となっているとする。特に $v_0$ を**始点** (*initial point,initial vertex*)，$v_n$ を**終点** (*terminal point*) と呼ぶ。
- グラフ $G$ の任意の 2 点に対し，一方の点を始点に他方の点を終点に持つ歩道が存在するとき，$G$ は**連結** (*connected*) であるという。
- グラフ $G$ における歩道 $W : v_0 v_1 \cdots v_{n-1} v_n$ が同じ辺を含まないとき，つまり $i \neq j$ に対し $v_{i-1} v_i \neq v_{j-1} v_j$ をみたすとき，**小径** (*trail*) という。両端点が同じ $(v_0 = v_n)$ である小径を**回路**，**閉小径** (*circuit,colsed trail*) という。
- グラフ $G$ における回路 $W$ が $G$ のすべての辺とすべての頂点を含むとき**オイラー回路** (*Eulerian circuit*) という。小径がすべての辺と頂点を含むとき**オイラー小径** (*Eulerian trail*) という。
- グラフ $G$ の頂点 $v$ に対し，$v$ と接続する辺の数を $v$ の**次数** (*degree*) といい，$\deg_G(v)$ で表す。$G$ が明らかなときは $\deg(v)$ とも書く。

**オイラーの定理** (オイラー回路)：連結なグラフに**オイラー回路** (*Eulerian circuit*) が存在する必要十分条件は各点の次数が偶数である事である。

- 歩道において $v_i \neq v_j (i \neq j)$ となっているとき**道** (*path*) という。
- $P := v_0 \cdots v_n$ が道であり，$v_n v_0 \in E$ かつ $n \geq 2$ のとき $C := v_0 \cdots v_n v_0$ を**閉路** (*cycle*) と呼ぶ。
- グラフ $G$ のサイクルがすべての頂点を含むとき**ハミルトンサイクル** (*Hamilton cycle*) という。

**ディラックの定理** (ハミルトンサイクル)：頂点数 $n \geq 3$ で，各頂点の次数が $\dfrac{n}{2}$ 以上の任意のグラフは**ハミルトンサイクル** (*Hamilton cycle*) を持つ。

- グラフ $G = (V, E)$ とする。写像 $c : V \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ で，$vw \in E$ のとき $c(v) \neq c(w)$ を満たすものを $n$–**彩色** (*coloriong*) という。$n$–彩色が存在するグラフを $n$–彩色可能なグラフという。
- グラフ $G$ の表現 $\widetilde{G}$ で平面に埋め込み可能なものが存在するとき $G$ を**平面的グラフ** (*planar graph*) という。

**4 色定理** (彩色問題)：平面上の地図は 4 色で塗り分けられる。グラフ理論の言葉で言うと，平面的グラフは 4 彩色可能である。

- $G = (V\ E)$ が次を満たすとき **2 部グラフ** (*bipertite graph*) であるという。$A \cap B = \emptyset$ をみたす $A, B$ により $G = A \cup B$ と表されており，任意の $x, y \in A$ に対し $xy \notin E$ かつ任意の $x, y \in B$ に対し $xy \notin E$ が成立している。
- $M \subseteq E$ が**マッチング** (*matching*) であるとは，任意の $e_1, e_2 \in M$ に対し $e_1$ と $e_2$ が隣接しないときをいう。

  $M$ に対し $\partial M = \{v \mid \exists w \in V\ vw \in M\}$ とする。マッチング $M$ が $U \subseteq \partial M$ を満たしているとき $M$ を $U$ のマッチングという。

- 有限集合 $A$ に対し $A$ の要素の個数を $|A|$ と書く。

- 頂点 $v$ に対し $\{ w \in V \mid vw \in E \}$ を $v$ の**近傍** (*neighborhood*) といい $N_G(v)$ と書く。$G$ が明らかなときは $N(v)$ とも書く。

  $S \subseteq V$ に対し $N(S) = \cup_{v \in S} N(v) = S$ を $S$ の近傍という。

**結婚定理** (マッチング)：2 部グラフ $G = (V, E)$ (2 部グラフの頂点の分割を $V = A \cup B$ とする) が $A$ の**マッチング** (*matching*) を持つ必要十分条件は任意の $S \subseteq A$ に対し $|N(S)| \geq |S|$ が成立する事である。

- グラフ $G = (V, E)$ とグラフ $H = (W, F)$ に対し $W \subseteq V$ が成立しているとき $H$ を $G$ の**部分グラフ** (*subgraph*) という。$H \neq G$ である部分グラフを**真部分グラフ** (*pure subgraph*) という。

  $G$ のすべての真部分グラフが平面的であるが，$G$ が平面的でないとき，$G$ は極小な非平面的グラフという。

- 任意の 2 頂点を結ぶ辺が存在するようなグラフを**完全グラフ** (*complete graph*) という。頂点数が $n$ の完全グラフを $K^n$ という記号で表す。

- $V = A \cup B$，$E = \{ uv \mid u \in A, v \in B \}$ とするとき $G = (V, E)$ を**完全 2 部グラフ** (*complete bipartite graph*) という。$|A| = n, |B| = m$ のときこのグラフを $K_{n,m}$ で表す。

- $x \notin V, yz \in E$ とする。$(V \cup \{ x \}, E - \{ yz \} \cup \{ yx, xz \})$ を $V$ の**細分** (*subdivision*) と呼ぶ。細分を有限回行って得られるグラフも細分と呼ぶ。

**クラトフスキーの定理** (平面グラフ)：非平面的グラフ $G$ は $K^5$ または $K_{3,3}$ の細分を部分グラフとして含む。

- $S \subseteq V$ とする。$V_1 = V - S, E_1 = E - \{ vw \in E \mid v \in S \}$ とおき $V - S = (V_1, E_1)$ と定義する。$v \in V$ に対し $V - \{ v \}$ を $V - v$ とも書く。

- 始点が $x$，終点が $y$ の道を $x$-$y$ 道という。始点と終点以外の頂点を**内点** (*interior point*) と呼ぶ。内点を共有しない 2 つの $x$-$y$ 道を**素** (*disjoint*) であるという。

- $G = (V, E)$ は連結，$x, y \in V$ とする。$S \subseteq V$ に対し $V - S$ に $x$-$y$ 道が存在しないとき，$S$ は $x$ と $y$ を**分離する** (*separate*) という。

**メンガーの定理** (連結度)：$G$ の異なる 2 頂点 $x, y$ に対し $x$ と $y$ を分離する頂点の個数の最小値は互いに素な $x$–$y$ 道の本数の最大値に一致する。

- $S \subseteq V$ に対し $E_1 = \{ vw \in E \mid v, w \in S \}$ とする。$(S, E_1)$ を $S$ から誘導される**誘導部分グラフ** (*induced subgraph*) という。
- グラフ $G = (V, E)$ に対し $\overline{E} = [V]^2 - E$ とする。$(V, \overline{E})$ を $G$ の**補グラフ** (*complement graph*) といい，$\overline{G}$ と書く。

**ラムゼーの定理** (ラムゼイナンバー)：任意の自然数 $r$ に対しある自然数 $n$ が存在して，$n$ 頂点以上の任意のグラフは誘導部分グラフとして $K^r$ または $\overline{K^r}$ を持つ。

# 3　グラフの基礎など

グラフの扱いに慣れるため，ここで頂点数の少ないグラフをすべて書き出すことを試みよう。
最初にグラフの同型を定義する。

**定義 2** 2 つのグラフ $G_1 = (V_1, E_1)$，$G_2 = (V_2, E_2)$ が**同型** (*isomorphic*) であるとは次の様な写像が存在することをいう。

$$f : V_1 \longrightarrow V_2$$

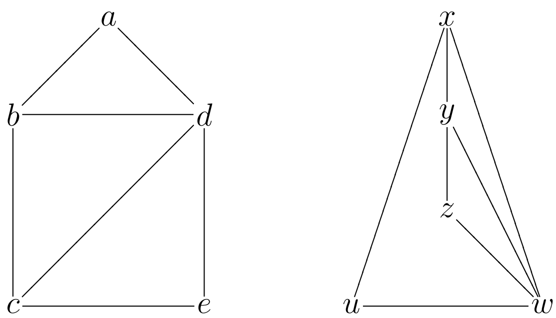
は全単射であり

$$vw \in E_1 \iff f(v)f(w) \in E_2$$

を満たす。このとき $G_1 \cong G_2$ と書く。

2 つのグラフの関係で重要なのはイコール (=) ではなく同型 ($\cong$) である。例えば 1 点からなるグラフでも $V_1 = \{ 0 \}, V_2 = \{ 1 \}$ として $G_1 = (V_1, \emptyset), G_2 = (V_2, \emptyset)$ とすると $G_1 \neq G_2$ である。我々は通常同型なグラフを「同じ」と考える。

次の 2 つのグラフは一見異なる様に見えるが，$a \longmapsto z, b \longmapsto y, c \longmapsto x, d \longmapsto w, e \longmapsto u$ という対応で同型であることが分かる。




$V$ が空集合のとき $[V]^2$ は空集合なので，$E \subseteq [V]^2$ となる集合 $E$ は空集合のみである。$(\emptyset, \emptyset)$ を**空グラフ**という。空グラフをグラフと認めない立場もある。我々は認める立場とする。$V$ が 1 点からなる集合のとき，$[V]^2$ は空集合なので，やはり $E \subseteq [V]^2$ となる集合 $E$ は空集合のみである。よって $V$ が 1 点のときグラフは $(\{x\}, \emptyset)$ しかない。このグラフを**自明なグラフ**と呼ぶ。

有限集合 $X$ に対し $\sharp X$ を集合 $X$ の元の個数とする。グラフ $G = (V, E)$ に対し，$\sharp V$ をグラフ $G$ の**位数** $(order)$ といい，$|G|$ で表す。$\sharp E$ を**辺数**といい，$\|G\|$ で表す。

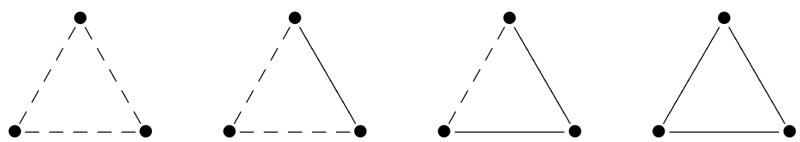
位数 $n$，辺数 $m$ とする。位数 $n$ のグラフの辺数は最大で ${}_nC_2$ なので

$$m \leq {}_nC_2$$

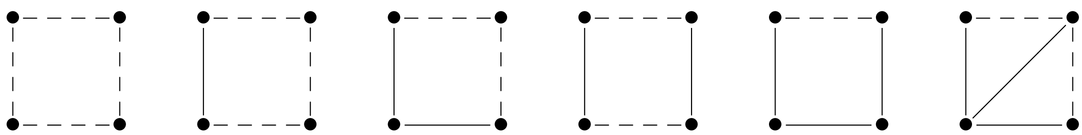
が成立する。$n = 2$ のときは次の 2 つである。ただし実線は辺が存在していることを，破線は存在しないことを表す。



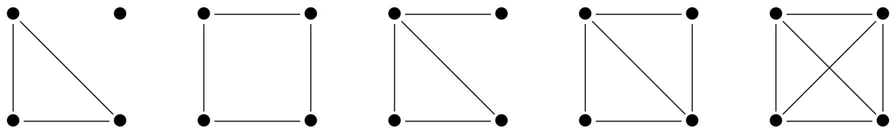
$n = 3$ で初めて cycle を持つグラフが登場する。cycle を持たない連結なグラフを**木** $(tree)$ と呼ぶ。木はデータ構造を表現する上で重要なグラフである。



$n = 4$ では同じ辺数を持つ複数の木が登場する。

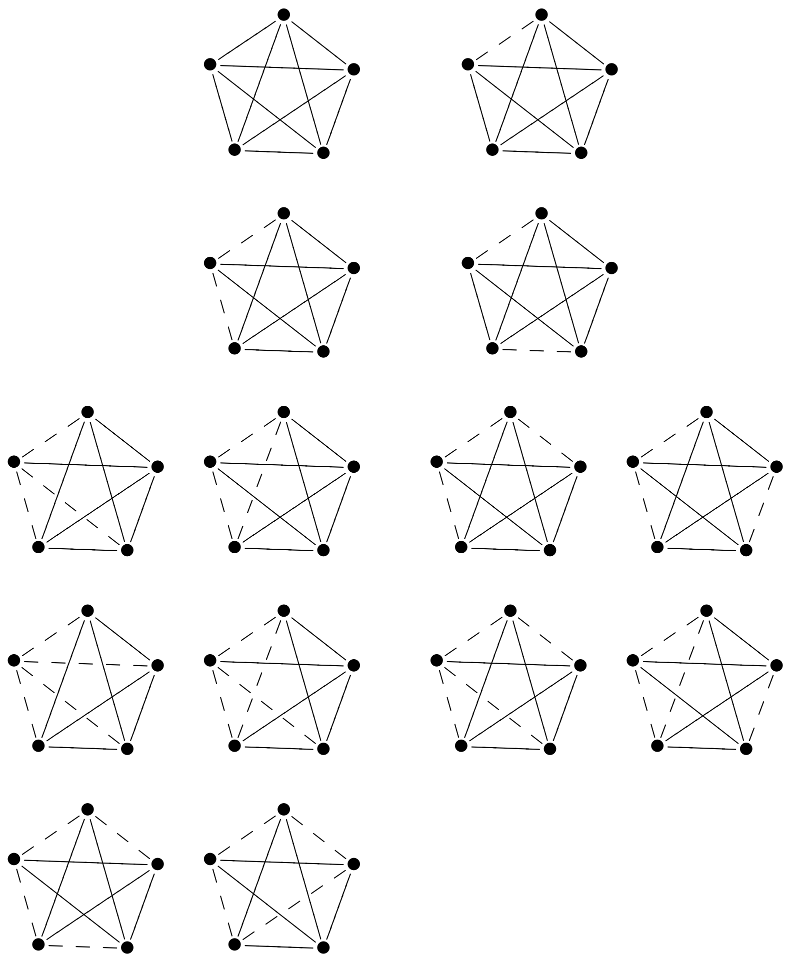


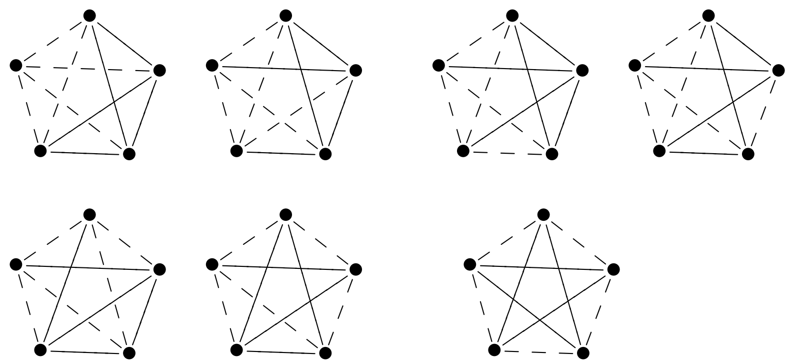
cycle を持つものは次である。



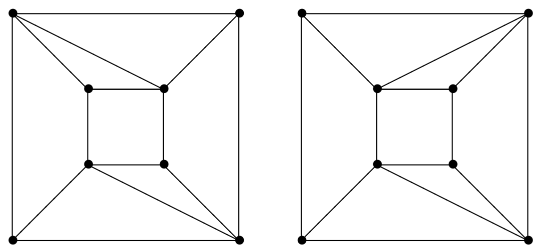
2 つのグラフ $G=(V,E)$ と $H=(W,F)$ の間に $W \subseteq V, F \subseteq E$ の関係があるとき $H$ を $G$ の**部分グラフ** (*subgraph*) と呼ぶ。頂点数 $n$ のグラフ $G=(V,E)$ は完全グラフ $K^n=(V,[V]^2)$ の部分グラフになっている。$(V,[V]^2-E)$ を $G$ の**補グラフ** (*complement graph*) といい $\overline{G}$ と書く。

$G_1 \cong G_2$ のとき $\overline{G}_1 \cong \overline{G}_2$ である。$|G|=n, \|G\|=m$ のとき $\|\overline{G}\|={}_nC_2-m$ である。辺の数が $m$ のグラフをすべて列挙すれば，その補グラフを考えることにより，辺の数が ${}_nC_2-m$ であるグラフも分かる。よって $n=5$ の場合 $m \geq 5$ を列挙する。





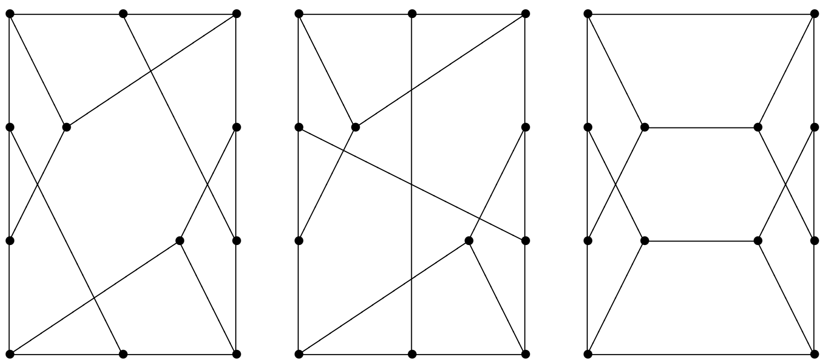
**演習問題 2**　次図の 2 つのグラフが同型かどうかを判定せよ。



**ヒント：** 同型の場合は同型対応を見つければよいが，同型でないときはそのことを証明する必要がある。グラフが同型であれば対応する頂点の次数は等しい。よって 2 つのグラフの次数をすべて書き並べたものが異なっているときグラフは同型にはならない。

これで判定できればよいのだが，この問題はそれではできない。もう少し詳しく考察する必要がある。

**演習問題 3**　次図のなかで同型なものはどれか。同型でないのはどれか，判定せよ。



**ヒント：**これらのグラフは頂点の次数がすべて 3(このようなグラフを 3–regular graph という) なので，次数の議論は使えない。そこ

で cycle に着目してみる。1 個の cycle ではうまくいかないかもしれないが共通辺をもつ複数の cycle で特徴的なものを探してみるのもよいかもしれない。

**演習問題 4**　グラフ $G=(V,E)$ に対し $\delta(G)=\min\{\,\deg(v)\mid v\in V\,\}$ とおく。

(1) $\delta(G)\geq 2$ ならグラフ $G$ はサイクルをもつことを示せ。

(2) $\delta(G)\geq 2$ ならグラフ $G$ は長さ $\delta(G)+1$ 以上のサイクルをもつことを示せ。**ヒント：**最長の長さの道の始点の周りの状況を調べよ。

**演習問題 5**　$|V|>3$ とする。$V$ の任意の 3 点から定まる**誘導部分グラフ**がすべて同型になるようなグラフをすべて決定せよ。

$G=(V,E)$ と $S\subseteq V$ に対し $E_S=\{uv\in E\mid u,v\in S\}$ とするとき $H=(S,E_S)$ を $S$ から定まる誘導部分グラフという。

**演習問題 6**　$|V|>4$ とする。$V$ の任意の 4 点から定まる誘導部分グラフがすべて同型になるようなグラフをすべて決定せよ。