グラフ理論要綱 #2

4 オイラー回路と一筆書き

$G=(V,E)$ をグラフとする。$W=v_0v_1\cdots v_n$ $(v_i\in V)$ がすべての i について $v_iv_{i+1}\in E$ を満たすとき W を**歩道** (*walk*) という。歩道 $W=v_0v_1\cdots v_{n-1}v_n$ が同じ辺を含まないとき，つまり $i\neq j$ に対し $v_iv_{i+1}\neq v_jv_{j+1}$ をみたすとき，**小径** (*trail*) という。両端点が同じ $(v_0=v_n)$ である小径を**回路, 閉小径** (*circuit,colsed trail*) という。

グラフ G における回路 W が G のすべての辺とすべての頂点を含むとき**オイラー回路** (*Eulerian circuit*) という。小径がすべての辺と頂点を含むとき**オイラー小径** (*Eulerian trail*) という。

歩道 $W=v_0v_1\cdots v_n$ が $v_i\neq v_i(i\neq j)$ を満たすとき**道** (*path*) というまたこのとき道の長さを n で定義する。$n=0$ のときこれを**自明な道** (*trivial path*) という。

$P=v_0v_1\cdots v_n$ が道で $v_nv_0\in E$ のとき $C=v_0v_1\cdots v_nv_0$ を**サイクル** (*cycle*) と呼ぶ。

$G=(V,E)$ と $v\in V$ に対し

$$\deg_G(v)=\sharp\{u\mid uv\in E\}$$

を v の**次数** (*degree*) という。

オイラーが 1736 年に示したのは次の定理である。

定理 3 グラフ G がオイラー回路を持つならば，G は連結であり, すべての頂点の次数は偶数である。

証明 $W=v_0v_1\cdots v_{n-1}v_n$ をオイラー回路とする。このとき勿論 $v_0=v_n$ が成立している。任意の 2 頂点 v_i,v_j $(i<j)$ について v_i と v_j を結ぶ道 $v_iv_{i+1}\cdots v_j$ が存在するので連結である。各頂点 v がオイラー回路に現れる様子を見る。$v=v_i(i\neq 0,n)$ のとき，$v_{i-1}v_i$ と v_iv_{i+1} は頂点 v と接続している。よって，回路の端でない部分に頂点 v が現れると，辺は 2 つ現れる。$v\neq v_0$ のとき，頂点が h 回現れると v の次数は $2h$ である。

また $v=v_0$ のとき $v=v_n$ なので端に 2 つ辺が現れる。$v=v_i(i\neq 0,n)$ となる i が h 個存在した場合 v の次数は $2h+2$ である。いずれの場合も頂点の次数は偶数である。 ∎

講義のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html(Renandi から辿れる) においてある。

100年以上後になって，ヒールホルツァー (Hierholzer) がこの定理の逆も成立する事を示した。この2つを合わせてオイラーの定理と呼ばれる事が多い。尚この定理は準グラフで成立する。

定理 4 グラフ G が連結で，G のすべての頂点の次数が偶数ならば，G はオイラー回路を持つ。

この証明のため次の補題を用意する。

補題 5 グラフ G において，どの頂点の次数も正で偶数ならば，G の任意の頂点はある回路の上にある。

証明　任意の頂点 v を選び，そこを始点に小径を作っていく。この子径: $vv_1 \cdots w$ が $v \neq w$ のとき，この中に現れる w に接続する辺は奇数個である。よってこの小径は延長する事ができる。頂点は有限個だからいつかは延長できなくなる。このとき $v = w$ でなくてはならない。よってこの小径は回路である。 ∎

定理 4 の証明：　$G = (V, E)$ を連結ですべての頂点の次数が偶数であるグラフとする。$C = v_0 v_1 \cdots v_n$ を最長の回路とする。C がすべての辺を含んでいればオイラー回路であり，定理は正しい。よって含んでいない辺があるとする。$E' = E - \{C$ に含まれる辺$\}$ とし，V' を E' のある辺に隣接するすべての頂点の集合とする。$H = (V', E')$ とすると H のすべての頂点の次数は偶数である。H は連結とは限らないが，G が連結であるので，C と H は共通の頂点 v_k を持つ。補題5より H のなかに v_k を含む回路 C_1 が存在する。これを $v_k m_1 \cdots m_r v_k$ とする。このとき $v_0 \cdots v_k m_1 \cdots m_r v_k \cdots v_n$ は C より長い G の回路となり矛盾。 ∎

この証明をよく見ると，オイラー回路を見つけるアルゴリズムが見つかる。つまり，オイラー回路を見つけるには次を順に行えばよい。

(1) 最初適当に回路をとる。

(2) グラフから回路を引いて残りがなければおしまい，それが求めるオイラー回路である。残っていれば，残りに元の回路と交わる回路が存在するので，定理の証明の様に回路を組み合わせて長い回路を作る。

(3) 以下 (2) を繰り返す。

定理3，4の系として，一筆書きに関する命題が証明される。

系 6 グラフ G が一筆書きできる必要十分条件は連結であって，すべての点の次数が偶数か，奇数次数の点が2つである事である。

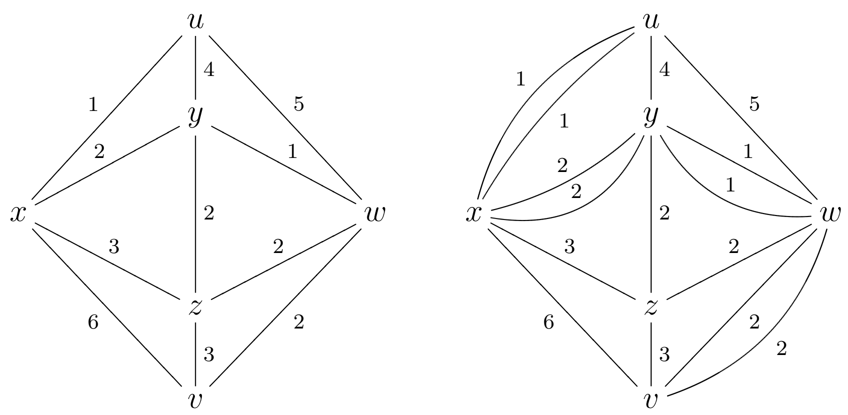
オイラーの定理関連として**中国郵便配達夫問題**を考える。郵便配達夫は郵便局で郵便を受け取り，配達して局に戻る。彼は受け持ち区域の各通りを少なくとも 1 回通らなければならない。この条件のもとできるだけ少なく歩くルートを選びたい。どのように選べばよいかという問題である。

この問題は中国人の Kuan が 1962 年に最初に考えたので，**中国**がついている。

問題を定式化しよう。連結なグラフ $G=(V,E)$ と写像 $w:E\longrightarrow\mathbb{R}$ で $w(e)\geq 0$ となるものが与えられているとする ($w(e)$ が道 e の長さと考えればよい)。G の歩道 $W=v_0v_1\cdots v_n$(ただし $v_n=v_0$) に対し $w(W)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}w(v_iv_{i+1})$ とする。すべての辺を通る歩道 W で始点と終点が同じ頂点で，$w(W)$ が最小になるような W を見つけよ，という問題である。

G がオイラーグラフ (オイラー回路が存在するグラフ，即ち各頂点の次数が偶数であるグラフ) のときは問題は解決されている。オイラー回路が最小値を与える。

オイラーグラフでないときは次の **2 重化**を考える。G の 1 つの辺 e に対し端点が e と同じの異なる辺 e' を考え，G に辺 e' を加えた「グラフ」を $G+e'$ と書く。$G+e'$ はグラフではなく，多重グラフになるが，ここでは「グラフ」と呼んでおく。$w(e')=w(e)$ と定義し w を $G+e'$ まで拡張する。この操作を有限回行って得られる「グラフ」を G の 2 重化といい G^* と書く。



中国郵便配夫達問題は次のように言い換えることができる。

G の 2 重化 $G^* = (V, E^*)$ になっているオイラーグラフの中で $\displaystyle\sum_{e \in E^* - E} w(e)$ が最小になるものを求めよ。

これを解く「良い」アルゴリズムは Edmonds–Johanson(1973) で与えられたが，複雑なのでここで紹介することはできない。

ここでは奇数次数の頂点 (奇点と呼ぶ) が 2 点の場合のアルゴリズムについてのみ解説する。奇点を始点および終点とする道 $P = v_0v_1 \cdots v_n$ で $w(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w(v_{i-1}v_i)$ を最小にするものを見つければよい。前図の例はそのようなものになっている。

それを見つけるアルゴリズムは次のようなものである。グラフ $G = (V, E)$，写像 $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ($w(e) \geq 0$ を満たす)，頂点 $u = u_0$ が与えられているとする。$vw \notin E$ のとき $w(vw) = \infty$ と定義することにより $w : [V]^2 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{ \infty \}$ と考える。道 $P = v_0v_1 \cdots v_n$ に対し $w(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w(v_{i-1}v_i)$ と定義する。$v, w \in V$ に対し

$$d(v, w) = \min \{ w(P) \mid P = vv_1 \cdots v_n w \}$$

とおく。これを v と w の距離と考えれば，最短の道を見つける問題である。$u \in S \subsetneq V$ に対し $\overline{S} = V - S$ とするとき

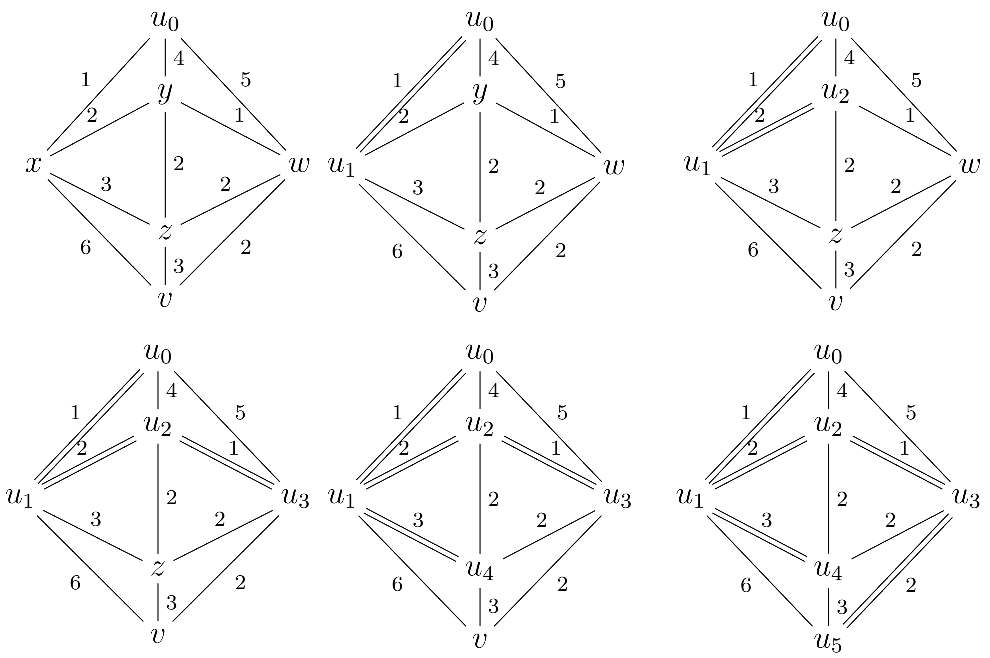
$$d(u, \overline{S}) = \min \left\{ d(u, w) \,\middle|\, w \in \overline{S} \right\}$$

と定義する。最短路を見つける上でキーポイントになるのは，

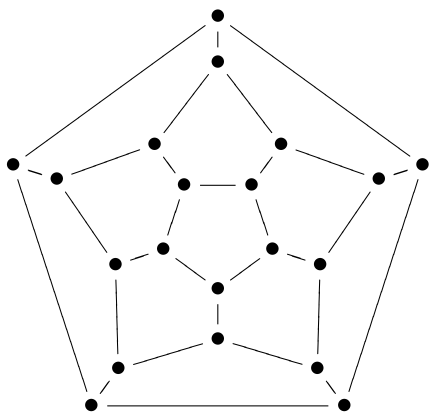
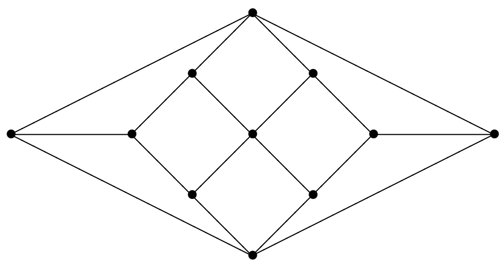
$$d(u, \overline{S}) = \min \left\{ d(u, v) + d(v, w) \,\middle|\, v \in S, w \in \overline{S} \right\}$$

である。

$S_0 = \{ u_0 \}$ とする。$d(u_0, \overline{S}_0)$ を計算し $d(u_0, \overline{S}_0) = d(u_0, u_1)$ となる頂点 u_0 を 1 つ選ぶ。$S_1 = \{ u_0, u_1 \}$ とする。以下順に $u_1, u_2, \ldots, u_j$ が選ばれているとする。$S_k = \{ u_0, u_1, \ldots, u_k \}$ とする。$d(u_0, \overline{S}_k) = d(u_0, u_{k+1})$ となる頂点 u_{k+1} を 1 つ選ぶ。$S_{k+1} = \{ u_0, u_1, \ldots, u_{k+1} \}$ とする。前の例でこれを実行してみよう。



オイラー回路の「双対」とも言うべき概念である「ハミルトンサイクル」について述べる。グラフ G のサイクルがすべての頂点を含んでいるとき，それを**ハミルトンサイクル** (*Hamilton cycle*) と呼ぶ。ハミルトンサイクルを持つグラフを**ハミルトングラフ** (*Hamilton graph*) と呼ぶ。

上図左は正 12 面体の辺と頂点からなるグラフである。これはハミルトングラフである。右は Herschel graph と呼ばれるグラフである。これはハミルトングラフではない。すべての頂点を通る道を**ハミルトン道** (*Hamilton path*) と呼ぶが，Herschel graph は hamilton path を含んでいる。

演習問題 7　正 12 面体グラフがハミルトングラフであることを示せ。また Herschel graph がハミルトングラフでないことを示せ。

オイラー回路に簡単な判定法があった様に，ハミルトンサイクルにもそれが期待されるが，その様なものは知られていない。『グラフ G がハミルトンサイクルを含むための必要十分条件は $\cdots$ である』という形の定理を見つける事はグラフ理論における重要な未解決問題の 1 つである。

必要十分条件は知られていないが十分条件はいくつか知られている。その中で古典的な 1 つを紹介しておこう。

定理 7 各頂点の次数が $\deg(v) \geq \dfrac{|G|}{2}$, $|G| \geq 3$ を満たすグラフはハミルトングラフである。

証明　定理が正しくないと仮定する。反例となるグラフが存在するが，その中で極大なものを考え，それを $G = (V, E)$ とする。「極大」の意味は辺をもう一本加えるとハミルトングラフになることを意味する。

$|G| \geq 3$ なので G が完全グラフならハミルトングラフになる。よって G は完全グラフではない。よって頂点 $u, v \in V$ で $uv \notin E$ となるものが存在する。

G に辺 uv を加えたグラフを $G{+}uv$ と書く。G は極大なので $G{+}uv$ はハミルトングラフであり，ハミルトンサイクルが存在するが，G はハミルトングラフでないので，ハミルトンサイクルは必ず辺 uv を含む。よって G はハミルトン道 $v_1 v_2 \cdots v_k$ で $v_1 = u, v_k = v$ となるものが存在する。ここでハミルトン道とはすべての頂点を含む道である。

$$S = \{\, v_i \mid uv_{i+1} \in E \}, \qquad T = \{\, v_i \mid v_i v \in E \}$$

とおく。

$v \notin S, v \notin T$ なので $\sharp(S \cup T) < |G|$ である。

$v_i \in S \cap T$ となる v_i が存在すると G にハミルトンサイクル

$$v_1 v_2 \cdots v_i v v_{k-1} \cdots v_{i+1} v_1$$

が存在し矛盾。よって $S \cap T = \emptyset$ である。このとき

$$|G| \leq \deg(u) + \deg(v) = \sharp S + \sharp T = \sharp(S \cup T) < |G|$$

となり矛盾。よって定理が証明される。 ∎

ハミルトングラフはオイラーグラフと違って必要十分を与える簡明な条件は知られていない。ここではオイラーグラフにおける中国郵便夫配達問題に対応するハミルトングラフの問題を考えてみる。それは**巡回セールスマン問題**という名で知られている。

セールスマンがいくつかの都市をすべて訪ねて，出発点に戻って来たい。そのとき都市間の旅行時間表が与えられており，移動時間を最短にするように戻って来たいとする。どのようなルートを選べばよいかという問題である。都市間の旅行代金が与えられており，旅費を最小にするようにルートを選ぶという問題でもよい。

グラフの問題にすると次の様な問題になる ：$G = (V, E)$ をグラフとし，$w : E \longrightarrow \mathbb{R}$ で各 $e \in E$ に対し $w(e) \geq 0$ を満たす写像が与えられているとする。G のハミルトンサイクル $C = v_0 v_1 \cdots v_n v_0$ で $w(C) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w(v_{i-1}v_i) + w(v_n v_0)$ が最小になるようなものを求めよ。

最小なサイクルを**最適サイクル**と呼ぶが，巡回セールスマン問題において最適サイクルを求める「良い」アルゴリズムは知られていない。ここで「良い」アルゴリズムの定義について述べる。

巡回セールスマン問題で最適サイクルを求めるアルゴリズムが存在しない訳ではない。グラフ $G = (V, E)$ において $|G|$ は有限なので $\|G\|$ も有限である。このことから G のすべてのハミルトンサイクルも有限個なので，それをすべて求めて，各ハミルトンサイクル C に対し $w(C)$ を計算して，その中で最小のものが求めるものである。これは有限のステップで完了するのでアルゴリズムになっている。これは有限の対象の場合はいつでも存在する**しらみつぶし法**と呼ばれる方法である。

このアルゴリズムは実際アルゴリズムを書き下し，実行してみれば分かるように，実行時間が大きくなりすぎる。そこでアルゴリズムに関し次を定義する。

グラフの頂点数を n とする。あるアルゴリズムが与えられており，頂点数 n のグラフに対しこのアルゴリズムの実行時間の最大値 (実行時間はグラフにより一般に異なる) は n を変数とする関数になるので，これを $f(n)$ とする。$f(n)$ がある n の多項式で押さえられるとき，即ちある n の多項式 $g(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ があって，

$$f(n) \leq g(n)$$

となっているとき，このアルゴリズムを**多項式時間**のアルゴリズムという。

$f(n)$ が指数関数 $g(n) = Ce^n$ によって $f(n) \leq g(n)$ となっていると

き**指数関数時間**のアルゴリズムという。$f(n)$ が階乗関数 $g(n) = Cn!$ によって $f(n) \leq g(n)$ となっているとき**階乗時間**のアルゴリズムという。

多項式時間のアルゴリズムを**良い**アルゴリズムと呼ぶ。

定義に関し注意をいくつか。実行時間は computer の性能に依存するのではないかという疑問が湧くかもしれない。しかし 2 つのフォンノイマン型 computer で一方の時間が $f_1(n)$ で他方が $f_2(n)$ のとき $f_1(n)$ が多項式時間なら $f_2(n)$ も多項式時間であることが知られている。指数関数等にかんしても同様である。

階乗時間のアルゴリズムは n が大きくなるにつれて，実行時間が急激に増大し事実上使い物にならなくなる。

時間をアルゴリズムのステップ数に変えても同様に定義ができる。計算量に関しきちんと議論する場合はチューリングマシンか標準となる仮想 computer を想定して議論することが多い。

しらみつぶし法は階乗時間のアルゴリズムになるので我々が求めるものではない。

巡回セールスマン問題に良いアルゴリズムの存在は知られていないし，存在しないのではないかとも考えられている。しかし非存在の問題は $P = NP$ **問題** ($P \neq NP$ 問題) とも関連して難しい問題である。

ここでは最適サイクルを見つけるのではなく,「適度に良い」サイクルを得るアルゴリズムを考える。

$G = (V, E)$ を与えられたグラフとする。何らかの方法でハミルトンサイクルが 1 つ見つかっているとする。それを改良することを考える。$C = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$ をハミルトンサイクルとする。このとき $1 < i + 1 < j < n$ を満たす i, j で

$$v_i v_j \in E, \quad v_{i+1} v_{j+1} \in E$$

を満たすものが存在するとき

$$C' = v_1 \cdots v_i v_j v_{j-1} \cdots v_{i+1} v_{j+1} v_{j+2} \cdots v_n v_1$$

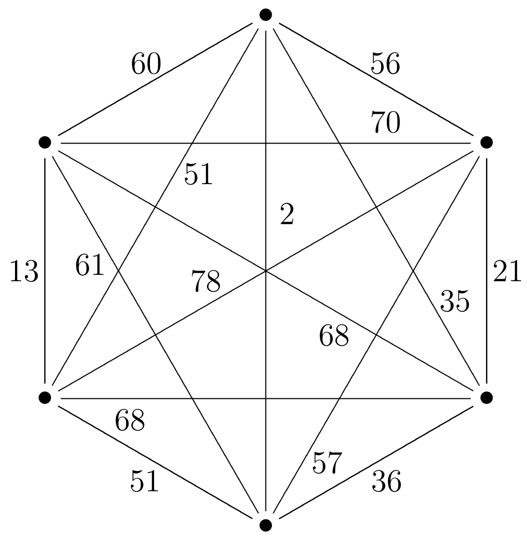
はハミルトンサイクルである。

$$w(v_i v_j) + w(v_{i+1} v_{j+1}) < w(v_i v_{i+1}) + w(v_j v_{j+1})$$

を満たすとき C' は C の改良になっている。

この操作を可能な限り続ける。得られるサイクルは最適なサイクルとは限らないが，多くの場合非常に良いサイクルである。

演習問題 8　次図の様なグラフと w が与えられている。適当なハミルトンサイクルを１つとり，それに対し上で述べたアルゴリズムを適用して「適度に良い」サイクルを見つけよ。



演習問題 9　グラフ $G = (V, E)$ と関数 $w : V \longrightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき，巡回セールスマン問題の「適度に良い」解を求めるプログラム書け。

演習問題 10　グラフ $G = (V, E)$ と関数 $w : V \longrightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき，巡回セールスマン問題の最適解を求めるプログラム書け。

演習問題 11　前演習問題をやったのを前提とする。自分で適当なデータ G, w を作成し，プログラムを実際に実行させ，実行時間を測定せよ。更に頂点数を増やして行ったとき実行時間がどうなるかを調べよ。

演習問題 12　演習問題 9 および 10 をやったのを前提とする。自分で適当なデータ G, w を作成しプログラムを実際に実行させ，2 つのプログラムの実行時間を測定せよ。更に頂点数を増やして行ったとき実行時間がどうなるかを調べよ。