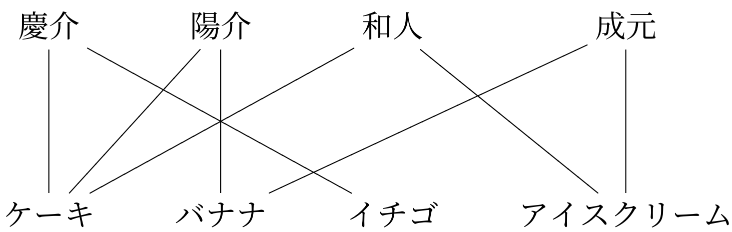
グラフ理論要綱 #3

5　マッチング

慶介，陽介，和人，成元の4人がいて好きな食べ物が

慶介	ケーキ，イチゴ
陽介	ケーキ，バナナ
和人	ケーキ，アイスクリーム
成元	バナナ，アイスクリーム

であり，ケーキ，バナナ，イチゴ，アイスクリームが1個ずつあるとする。このとき4人に分配するために次の様なグラフを考えることは有用かもしれない。



この例のおける分配の最適解は頂点を共有しない4本の辺を見つけることに対応している。この例なら特に理論がなくても少し考えれば最適解を見つけることはできる。だが，100人の従業員のいる工場で，仕事の種類が10種類ありそれに振り分けられる人数が決まっているとする。各人はいくつかの仕事をすることが可能なときに，最大の仕事量を実現するためには，どのように割り振ればよいか，という問題になると理論的考察なしに最適解を見つけることは難しい。ここではマッチングと呼ばれる問題を考える。

グラフを $G = (V, E)$ とする。2つの辺が頂点を共有しないとき**独立**であるという。辺の集合 M の任意の2つの辺が独立であるとき**マッチング**と呼ばれる。頂点の集合 U が次を満たすとき U は M に**マッチされている**という；$\forall v \in U, \exists e \in M$ ；v は e と接続している。U がマッチング M でマッチされているとき，M を U のマッチングと呼ぶ。頂点 $v \in V$ に対して $\{v\}$ のマッチング M を v のマッチングといい，v は M でマッチされるという。

講義のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html(Renandi から辿れる) においてある。

グラフ $G=(V,E)$ とマッチング M を考える。我々は個数が一番多いマッチング (それを**最大マッチング**と呼ぶ) を探したい。そのために次を定義する。道 $P := v_0v_1\cdots v_n$ が M **に関する交互道**であるとは $v_{2i}v_{2i+1}\notin M$ かつ $v_{2i-1}v_{2i}\in M$ $(i=1,2,\ldots)$ かつ v_0 は M に属する辺の頂点になっていないときをいう。P が交互道であり，v_n が M に属する辺の頂点になっていないとき M **に関する増大道**という。M が交互道のとき $M' = (M-\{v_1v_2, v_3v_4,\ldots\})\cup\{v_0v_1, v_2v_3,\ldots\}$ はまたマッチングになっているので，P が増大道なら $\sharp M' = \sharp M+1$ となっている。次の命題から最大マッチングを求めるためには増大道を探せばよいことが分かる。

命題 8 M が最大でないマッチングならば M に関する増大道が存在する。

証明　M を最大でないマッチング，M' を最大マッチングとする。M と M' の対称差 $M\triangle M' = (M\cup M')-(M\cap M')$ を考える。$M\triangle M'$ は頂点も併せてグラフと見ることができる。$M\triangle M'$ の頂点の次数は高々2 である。$M\triangle M'$ の連結成分は長さが偶数のサイクルか道のいずれかである。すべての成分がサイクルなら $\sharp M = \sharp M'$ となり矛盾。よって道が存在する。

長さ 1 の成分 $e=vw$ が存在したとする。$e\in M'$ とすると $e\notin M$ である。v または w が M の辺の頂点になっていれば成分の長さは 1 以上になる。よって v,w は M の辺の頂点ではない。このことは e が M の増大道であることを意味している。このときは増大道が存在した。$e\in M$ のときも同様に最大マッチング M' に増大道が存在するので矛盾。

よって道である成分の長さは 2 以上である。道の長さがすべて偶数なら $\sharp M = \sharp M'$ なので奇数の成分が存在する。奇数成分が M の辺から始まれば最後の辺も M である。よってすべての奇数成分が M の辺から始まれば $\sharp M > \sharp M'$ で矛盾。

M' から始まる成分成分が存在する。この成分は M に関する増大道になっている。 ∎

マッチングのなかでも 2 部グラフのマッチングは重要である。G を 2 部グラフとする。しばらくの間特に断らない 2 部グラフといった場合 $G=(V,E)$ が $V=A\cup B$ $(A\cap B=\emptyset)$ と分かれていて，A 同士及び B 同士を結ぶ辺が存在しないとする。更に対称性より $\sharp A\leq\sharp B$ としておく。A のマッチングが G の最大マッチングを与える

グラフ $G = (V, E)$ とする。$U \subseteq V$ に対し

$$N_G(S) = N(S) = \{ u \mid us \in E, s \in S \} - S$$

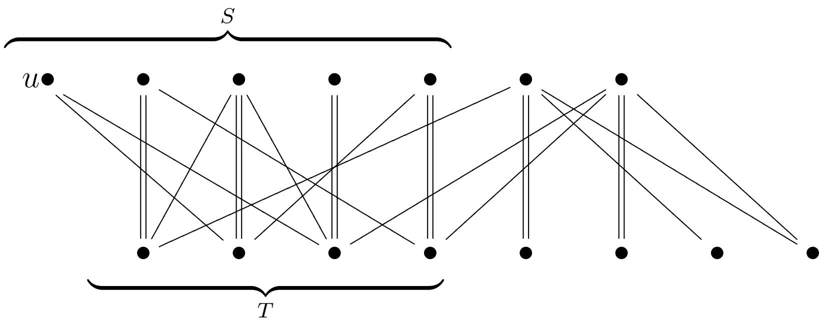
を S の**近傍** (*neighborhood*) と呼ぶ。

A のマッチングが存在すれば，任意の $S \subseteq A$ に対し $\sharp N(S) \geq \sharp S$ はすぐに分かるがこの条件は二部グラフに対しては十分条件にもなっている。

定理 9 [**結婚定理** Hall 1935] A がマッチングを持つ必要十分条件は $\forall S \subseteq A$ に対し $\sharp N(S) \geq \sharp S$ が成立する事である。

証明　A がマッチング M を持つとする。A の任意の部分集合 S とする。S の元 s に対し $su \in M$ となる辺が存在する。G は二部グラフなので $u \notin A$ より $u \notin S$ であり，$u \in N(S)$ となる。異なる s に対して u も異なるので $\sharp N(S) \geq \sharp S$ である。

逆に $\sharp N(S) \geq \sharp S$ を満たす二部グラフを G とする。A のマッチングが存在しないと仮定して矛盾を導く。M を G の最大マッチングとする。M は A をマッチしていないので頂点 $u \in A$ で M にマッチされないものが存在する。Z を M–交互道によって u に連結する点全体の集合とする。M は最大マッチングなので命題 8 により，u は Z の中で M にマッチされない唯一の点である。



ここで $S = Z \cap A, T = Z \cap B$ とおくと $T = N(S)$ である。$S - \{ u \}$ の点は T の点と M でマッチされているので $\sharp T = \sharp S - 1$ が成立する。これは $\sharp N(S) \geq \sharp S$ に矛盾する。 ∎

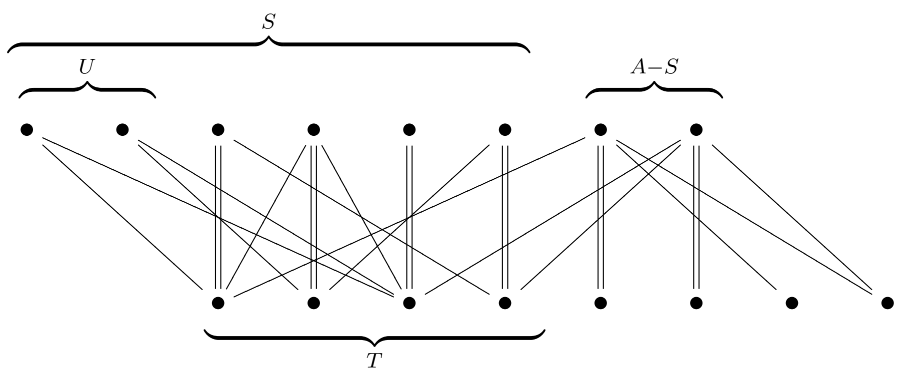
$U \subseteq V$ が**頂点被覆**であるとは，G の任意の辺に対しその頂点となる点が U のなかに存在する事をいう。M をマッチング，U を頂点被覆とすると

$$\sharp M \leq \sharp U$$

が成立するのは明らかである。2 部グラフの場合頂点被覆の最小個数が最大マッチングの個数を与える。

定理 10 [Köning 1931] 2 部グラフ G の最大マッチングが含む辺の個数は，頂点被覆が含む点の個数の最小値に等しい。

証明　M を最大マッチングとする。A の頂点で M にマッチされないもの全体の集合を U とする。U のどれかの元と M–交互道で結ばれる点全体の集合を Z とし，$S = Z \cap A, T = Z \cap B$ とおく。このとき $T = N(S)$ となっている。



$K = T \cup (A - S)$ とおくと $\sharp M = \sharp K$ である。この K は頂点被覆になっている。なぜなら，もしそうでないとすれば S の頂点と $B - T$ の頂点を結ぶ辺が存在することになるが，これは $T = N(S)$ に矛盾する。∎

演習問題 13　2 部グラフでないグラフ G で結婚定理が成り立たない例をあげよ。

演習問題 14　A を有限集合，$A_1, \ldots, A_n$ をその部分集合とし，$d_1, \ldots, d_n$ を自然数とする。任意の $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し

$$\sharp\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \geq \sum_{i \in I} d_i$$

が成立するとき，各 k $(k = 1, \ldots, n)$ に対し $\sharp D_k = d_k$ となる集合 $D_k \subseteq A_k$ で $D_1, \ldots, D_n$ が互いに共通部分を持たないものが存在することを示せ。**ヒント**：結婚定理を適用できる様な 2 部グラフを考えよ。

演習問題 15　非負の実数を要素に持つ行列 Q が，各行の要素の総和が 1 で各列の要素の総和も 1 のとき**重確率行列**という。また 0 と 1 の成分からなる行列が各行各列にちょうど 1 個の 1 を持つとき**置換行列**という。置換行列は重確率行列である。結婚定理の応用として次を示すことを考える。

(1) 重確率行列は正方行列である。
(2) 重確率行列は置換行列の凸1次結合で表される。即ち重確率行列 Q に対し置換行列 $P_1, \ldots, P_k$ と非負実数 $c_1, \ldots, c_k$ で $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i = 1$ となるものが存在して $Q = c_1P_1 + \cdots + c_kP_k$ となる。

そのために重確率行列 $Q = (q_{ij})$ に対し次の様にグラフ G_Q を決める。ただし Q の次数は n とする。$X = \{x_1, \ldots, x_n\}, Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ とおき $V = X \cup Y$ とする。$q_{ij} > 0$ となっているとき $x_iy_j \in E$ と定め，$G_Q = (V, E)$ とする。このとき次を順に示すことにより，問題を解け。
(1) G_Q は2部グラフであり完全マッチングを持つ。
(2) マッチング M に対し次のように置換行列 P を定める ; $e = x_iy_j \in M$ のとき $p_{ij} = 1$，それ以外は $p_{ij} = 0$。このとき $Q' = (1+c)Q - cP$ は重確率行列であることを示せ。
(3) 0 でない成分の個数についての帰納法で問題 (2) を示せ。

マッチングが M がすべての頂点をマッチしているとき**完全マッチング**という。一般のグラフに対し完全マッチングを求めるアルゴリズムを紹介する。

STEP0 任意にマッチング M を選ぶ。→STEP1

STEP1 M がすべての点をマッチングしていれば，M は完全マッチングなので終了。
そうでなければマッチされていない点 u を選ぶ。$S = \{\, u \,\}, T = \emptyset$ とする。→STEP2

STEP2 $\sharp S = \sharp T + 1$ が成立している。$N(S) = T$ ならば完全マッチングは存在しないので終了。
そうでないなら $y \in N(S) - T$ となる頂点をとる。→STEP3

STEP3 y が M でマッチされているなら $yz \in M$ となる頂点が存在する。$S \cup \{\, z \,\} \to S, T \cup \{\, y \,\} \to T$ として →STEP2
もし y が M でマッチされてないなら，u で始まり y で終わる増大道 P が存在する。この増大道を用いて $\sharp M' = \sharp M + 1$ となるマッチングを作る。$M' \to M$ として →STEP1

このアルゴリズムが良いアルゴリズムであることに注意すること。

演習問題 16 前述のアルゴリズムを2部グラフに対しプログラムとして実装せよ。

演習問題 17　乱数を用いて A，B の頂点数が 40 以上の 2 部グラフを生成するプログラムを書け。そのグラフに対し演習問題 16 のプログラムを適用し最大マッチングの存在・非存在を判定し，存在する場合はそれを求めよ。