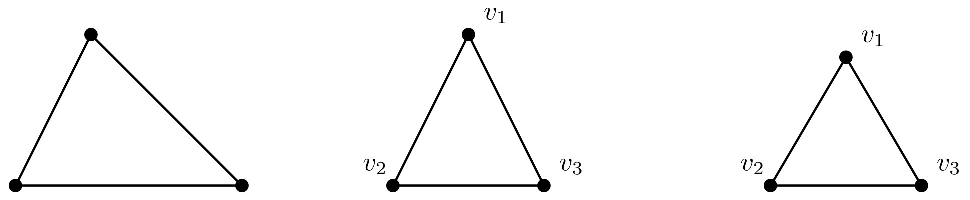
情報数理 I 要綱 #1　　2003–10–23　　河野

0　イントロ

「群と対称性」というテーマで講義を行う。「対称性」とはどう定義されるだろう。最初は例から。下の Δ_1 は不等辺三角形，Δ_2 は 2 等辺三角形，Δ_3 は正三角形とする。右に行くほど対称性が高くなるように思えるが，数学的にはどう考えればよいのだろうか。



Δ_1　　Δ_2　　Δ_3

Δ_i $(i = 1, 2, 3)$ を全体として固定する長さを保存する平面上の写像を考える。長さを保つ写像全体のつくる集合を M とする。即ち $M = \{ f \mid f$ は$\boldsymbol{R}^2$から$\boldsymbol{R}^2$への写像で長さを保つ$\}$ とする。ここで長さを保つとは任意の $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対し $\|f(x) - f(x')\| = \|x - x'\|$ が成立する事を意味する。

$X \subseteq \boldsymbol{R}^2$ に対し $M(X) = \{ f \in M \mid f(X) = X \}$ と定義する。$M(\Delta_1)$ は Δ_1 を全体として固定する写像だが，そのようなものは恒等写像しかない。

線分 v_2v_3 の垂直二等分線に関する折り返しを τ_1 とすると，$\tau_1(\Delta_2) = \Delta_2$ となっている。$M(\Delta_2) = \{id, \tau_1\}$ が分かる。ここで id は恒等写像を表す。

線分 v_1v_2 に関する折り返しを τ_3，線分 v_3v_1 に折り返しを τ_2，重心を中心とする $\dfrac{2\pi}{3}$ 回転を σ_1，$\dfrac{4\pi}{3}$ 回転を σ_2 とする。このとき $M(\Delta_3) = \{id, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ となる。

「X の対称性が高い」という事実は $M(X)$ が「大きい」事と考える事ができそうである。

$M, M(X)$ はただの集合ではなく，合成写像に関して「閉じている」という性質を持っている。$f, g \in M$ に対し合成写像 $f \circ g$ が $f \circ g(x) = f(g(x))$ で定義できる。このとき $f \circ g \in M$ となる。また恒等写像 id は M に属し，任意の $f \in M$ に対し $f \circ id = id \circ f = f$ となる。M の元 f は一対一上への写像なので逆写像が存在し $f^{-1} \in M$ となっている。これらの性質を今まで述べてない結合法則も含めてまとめると次の様になる。

M には M 上の 2 項演算 $\circ$ が定義されていて次を満たす。

(1) 結合法則を満たす ; 任意の $f, g, h \in M$ に対し $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

(2) 単位元の存在 ; M には id(単位元と呼ばれる) という元が存在して，任意の $f \in M$ に対し $f \circ id = id \circ f = f$ が成立する。

(3) 逆元の存在 : 任意の $f \in M$ に対し $f^{-1} \in M$(f の逆元と呼ばれる) が存在して $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ が成立する。

上では M について述べたが $M(X)$ も同様の性質を持つ。これらの性質をもつものは**群** ($group$) と呼ばれ，重要な役割を果たす。

M は無限群 (集合としてみると無限集合になっている群) なので難しいが，$M(\Delta_3)$ は有限群なので演算表というものを考える事ができる。演算表とは次の様なものである。

有限群を G としてそのすべての要素を $g_1, \ldots, g_n$ とする。$g(i,j) = g_i \circ g_j$ とする。演算表とは縦横共に n の表で i 行 j 列に $g(i,j)$ が書かれているものの事である。

$M(\Delta_2)$ の演算表を考える。$M(\Delta_2)$ の元は id と τ_1 だけなので演算表は次の様になる。ただし 1 行目と 1 列目に指示行・列を加えてある。

	id	τ_1
id	id	τ_1
τ_1	τ_1	id

演算表が得られると群の演算に関する事はそれから見る事ができる。

演習問題 0.1　$M(\Delta_3)$ の演算表を作れ。

演習問題 0.2　X_4 を正方形とする。$M(X_4)$ は群になるがその演算表を作れ。