河野

2　平面における対称性

この節では平面における対称性について議論しよう。

$M = \left\{ f \,\middle|\, f \text{ は} \boldsymbol{R}^2 \text{から} \boldsymbol{R}^2 \text{への写像で長さを保つ} \right\}$ であったが，最初に M を決定しよう。

$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ と置く。$\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{R}^2$ の任意のベクトルとする。$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を $f(\boldsymbol{x}) = A(\theta)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ と定める。任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ に対し $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')\| = \|A(\theta)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} - (A(\theta)\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{b})\| = \|A(\theta)\boldsymbol{x} - A(\theta)\boldsymbol{x}'\| = \|A(\theta)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\|$ である。よって任意のベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ に対し $\|A(\theta)\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}\|$ が示されれば $f \in M$ が分かる。$A(\theta)\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \cos\theta p - \sin\theta q \\ \sin\theta p + \cos\theta q \end{pmatrix}$ なので $\|A(\theta)\boldsymbol{y}\|^2 = (\cos\theta p - \sin\theta q)^2 + (\sin\theta p + \cos\theta q)^2 = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(p^2 + q^2) = (p^2 + q^2) = \|\boldsymbol{y}\|^2$ となり示された。$g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を $g(\boldsymbol{x}) = B(\theta)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ で定義する。前の f と同様にやれば $g \in M$ が分かる。

次に M の元はこのタイプのものしかない事を示そう。h を M の任意の元とする。h が f, g いずれかのタイプになる事を示せばよい。$\boldsymbol{b} = h(\boldsymbol{0})$ と置く。$k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ とすると $k \in M$ である。$h' = kh$ とおくと，$h' \in M$ であり $h'(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ となっている。最初に h' が線型写像である事を示す。そのためには (1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $h'(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = h'(\boldsymbol{x}) + h'(\boldsymbol{y})$ (2) 任意の $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 a に対し $h'(a\boldsymbol{x}) = ah'(\boldsymbol{x})$ を示せばよい。

(a) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $h'\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\right) = \frac{1}{2}(h'(\boldsymbol{x}) + h'(\boldsymbol{y}))$ 及び (b) 任意の $\boldsymbol{x}$ について $h'(2\boldsymbol{x}) = 2h'(\boldsymbol{x})$ の 2 つを示せば (1) が示される。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ なら (a) は成立するので $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ とする。位置ベクトルとして考えると $\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の中点となっている。h' は距離を保つので $h'\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\right)$ は $h'(\boldsymbol{x})$ と $h'(\boldsymbol{y})$ の中点にならなければならない。よって $h'\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\right) = \frac{1}{2}(h'(\boldsymbol{x}) + h'(\boldsymbol{y}))$ である。

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なら (b) は成立するので $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ とする。$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{0}$ と $2\boldsymbol{x}$ の中点なので $h'(\boldsymbol{x})$ は $h'(\boldsymbol{0})$ と $h'(2\boldsymbol{x})$ の中点である。よって $h'(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(h'(\boldsymbol{0}) + h'(2\boldsymbol{x}))$ となる。$h'(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ より (b) が得られる。(2) は (b) の証明において中点 (一対一) の部分を $1 : a$ と置き換えて議論すれば得られる。以上により h' が線型写像である事が分かった。

次に h' が内積を保存する事を示す。内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と書く。任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $\|h'(\boldsymbol{x}) - h'(\boldsymbol{y})\|^2 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$ が成立している。$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となる。同様の計算で $\|h'(\boldsymbol{x}) - h'(\boldsymbol{y})\|^2 = \|h'(\boldsymbol{x})\|^2 + \|h'(\boldsymbol{y})\|^2 - 2(h'(\boldsymbol{x}), h'(\boldsymbol{y}))$ が分かる。これらより $(h'(\boldsymbol{x}), h'(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が得られる。

h' は内積を保つので直交するベクトルを直交するベクトルに移す。$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{a} = h'(\boldsymbol{e}_1)$，$\boldsymbol{b} = h'(\boldsymbol{e}_2)$，$A = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b})$ とすると，h' は線型写像なので $h'(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表

される。$\|\boldsymbol{a}\| = 1$ なのである φ を用いて $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ と書ける。$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と直交する長さ 1 のベクトルなので $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \pi/2) \\ \sin(\varphi + \pi/2) \end{pmatrix}$ または $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi - \pi/2) \\ \sin(\varphi - \pi/2) \end{pmatrix}$ と書ける。前者の場合 $\cos(\varphi + \pi/2) = -\sin\varphi$, $\sin(\varphi + \pi/2) = \cos\varphi$ なので $\theta = \varphi$ とおくと $A = A(\theta)$ となる。後者の場合 $\cos(\varphi - \pi/2) = \sin\varphi$, $\sin(\varphi - \pi/2) = -\cos\varphi$ なので $\theta = \dfrac{1}{2}\varphi$ とおくと $A = B(\theta)$ となる。以上により $h'(\boldsymbol{x}) = A(\theta)\boldsymbol{x}$ または $h'(\boldsymbol{x}) = B(\theta)\boldsymbol{x}$ となるので h は f または g のタイプになる。

ここで「向きを保つ」,「向きを逆にする」という概念を導入する。$\boldsymbol{R}^2$ の 2 つのベクトルの組 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し，それを並べてできる行列 $A = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})$ の行列式 $\det(A)$ が正のとき「右手系」，負のとき「左手系」と呼ぼう。f を $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像とする。基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し $f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{0}), f(\boldsymbol{e}_2) - f(\boldsymbol{0})$ が右手系のとき f は「向きを保つ」といい，$f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{0}), f(\boldsymbol{e}_2) - f(\boldsymbol{0})$ が左手系のとき f は「向きを逆にする」と呼ぶ事にする。$f(\boldsymbol{x}) = A(\theta)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ のとき $f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{0}) = A(\theta)\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ であり，$f(\boldsymbol{e}_2) - f(\boldsymbol{0}) = A(\theta)\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ なので得られる行列は $A(\theta)$ である。$\det(A(\theta)) = 1$ なので f は向きを保つ写像である。同様に $g(\boldsymbol{x}) = B(\theta)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ に関して行列を作ると $B(\theta)$ が得られ，$\det(B(\theta)) = -1$ より g は向きを逆にする写像である事が分かる。

一般次元にかんしても定義しておこう (ただし実際に考察するのは $n = 3$ の場合だけであろう)。$\boldsymbol{R}^n$ の n 個のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ に対し，それを並べてできる行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \cdots\, \boldsymbol{a}_n)$ の行列式 $\det(A)$ が正のとき「右手系」，負のとき「左手系」と呼ぶ。f を $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ への写像とする。$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ を基本ベクトルとする。$f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{0}), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n) - f(\boldsymbol{0})$ が右手系のときが右手系のとき f は「向きを保つ」といい，$f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{0}), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n) - f(\boldsymbol{0})$ が左手系のとき f は「向きを逆にする」と呼ぶ。

2 次元の話に戻ろう。$\mathrm{ori} : M \to \{1, -1\}$ を $h \in M$ が向きを保つ写像なら $\mathrm{ori}(h) = 1$，向きを $M^+ = \{ f \in M \mid\ f$ は向きを保つ$\}$ とする。向きを保つ M の写像の積は向きを保つし，向きを保つ写像の逆写像も向きを保つ事が分かるので ori は準同形写像になる。$\mathrm{Ker(ori)} = M^+$ なので M^+ は群をなす。この M^+ の事を 2 次の**運動群**と呼ぶ。また M を 2 次の**合同変換群**と呼ぶ。

演習問題 2.1　ori が準同形写像である事を示せ。

M の元は代数的には $f(\boldsymbol{x}) = A(\theta)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ または $g(\boldsymbol{x}) = B(\theta)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ と書けたが幾何的に考えてみよう。最初に向きを保つ写像 f は幾何的にはどのような写像だろうか。ある点 a での θ 回転は点 a を原点に平行移動で移し，θ 回転させ再び原点を点 a に平行移動したものになる。このときその合成写像を $f_{\boldsymbol{a},\theta}$ と書くと $f_{\boldsymbol{a},\theta}(\boldsymbol{x}) = A(\theta)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = A(\theta)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} - A(\theta)\boldsymbol{a} = A(\theta)\boldsymbol{x} + (E - A(\theta))\boldsymbol{a}$ となる。$E - A(\theta)$ が逆行列を持てば $\boldsymbol{a} = (E - A(\theta))^{-1}\boldsymbol{b}$ と置く事により $f(\boldsymbol{x}) = A(\theta)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は $(E - A(\theta))^{-1}\boldsymbol{b}$ の周りの θ 回転である事が分かる。$\det(E - A(\theta)) = 2(1 - \cos\theta)$ となるので $\theta \neq 0$ のとき逆行列を持ち f はある点の周りでの回転移動になっている。$\theta = 0$ のとき $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ と

なるので平行移動である。以上により M^+ の元は平行移動またはある点の周りの回転移動である事が分かる。

次に向きを逆にする写像を考える。ある直線に関する折り返しはその様なものになっているが, ある直線で折り返した後その直線に沿って平行移動をしたものも向きを逆にする写像である。しかもそれは固定点 ($f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ となる点 x を固定点と呼ぶ。) を含まないので折り返しではない。これを**スライド折り返し**と呼ぼう。$M - M^+$ の元は折り返しまたはスライド折り返しである事を示す。$g(\boldsymbol{x}) = B(\theta)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ とする。$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ と置くと $B(\theta)\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{f}_1$, $B(\theta)(\boldsymbol{f}_2) = -\boldsymbol{f}_2$ となっている。$B(\theta)(\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{f}_2) + a\boldsymbol{f}_2 = B(\theta)\boldsymbol{x} + 2a\boldsymbol{f}_2$ は $a\boldsymbol{f}_2$ を通る傾き θ の直線に関する折り返しになっている。$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ は平面のベクトルの基底をなすので $\boldsymbol{b} = a_1\boldsymbol{f}_1 + a_2\boldsymbol{f}_2$ となる実数が存在する。このとき $g(\boldsymbol{x}) = B(\theta)(\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}a_2\boldsymbol{f}_2) + \frac{1}{2}a_2\boldsymbol{f}_2 + a_1\boldsymbol{f}_1$ となる。g は $a_1 = 0$ のときは点 $\frac{1}{2}a_2\boldsymbol{f}_2$ を通る傾き θ の直線に関する折り返しであり, $a_1 \neq 0$ のときはスライド折り返しで, 前者の折り返しの後に $a_1\boldsymbol{f}_1$ だけ平行移動をしたものになっている。

$f \in M$ に対し f の**固定点集合** (*fixed point set*) を $\mathrm{Fix}(f) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \right\}$ で定義する。$\mathrm{Fix}(f)$ の点を f の**固定点** (*fixed point*) と呼ぶ。M の元は次の 5 つのタイプに分けられる事が分かる。

(1) **恒等写像** id 固定点集合 $\mathrm{Fix}(id) = \boldsymbol{R}^2$ は全平面。

(2) **恒等写像以外の回転** 固定点集合 $\mathrm{Fix}(f) = \{\boldsymbol{a}\}$ は一点からなる。

(3) **恒等写像以外の平行移動** 固定点集合 $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$ は空集合

(4) **折り返し** 固定点集合 $\mathrm{Fix}(f) = \ell$ は一直線。

(5) **スライド折り返し** 固定点集合 $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$ は空集合。

平面図形の対称性について考えよう。$M_0 = \{ f \in M \mid f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \}$, $M_0^+ = \{ f \in M^+ \mid f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \}$ とする。

命題 2.1 $M_0 \cong O(2)$, $M_0^+ \cong SO(2)$

証明 $h \in M_0$ に対し 2 次行列 A が存在して $h(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となっている。このとき $F : M_0 \to O(2)$ を $F(h) = A$ で定義する。

まず $A \in O(2)$ をチェックする。前の議論より $A = A(\theta)$ または $A = B(\theta)$ となっている。$A(\theta)A(\theta)^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より $A(\theta) \in O(2)$ が分かる。また $B(\theta)B(\theta)^t = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より $B(\theta) \in O(2)$ が分かる。

$h' \in M_0$ に対し $h'(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ とおく。$hh'(\boldsymbol{x}) = h(B\boldsymbol{x}) = A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$ となるので $F(hh') = AB = F(h)F(h')$ となり準同型写像である事が分かる。

$h \in \mathrm{Ker}(F)$ とすると $F(h) = E$ (単位行列) より $h(\boldsymbol{x}) = E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ が分かり h は恒等写像である。よって $\mathrm{Ker}(F) = \{id\}$ となり一対一が分かる。

最後にFが全射である事を示せば，Fが同型写像である事が分かる。Aを$O(2)$の任意の元とすると$AA^t=E$となる。$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とすると$AA^t=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$なので$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$は長さが1のベクトルなので$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$とおく。$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$も長さ1のベクトルで，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$との内積が0なので$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\pi/2) \\ \sin(\varphi+\pi/2) \end{pmatrix}$または$\begin{pmatrix} \cos(\varphi-\pi/2) \\ \sin(\varphi-\pi/2) \end{pmatrix}$とおける。$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\pi/2) \\ \sin(\varphi+\pi/2) \end{pmatrix}$のときは$\theta=-\varphi$とおくと$A=A(\theta)$となる。$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\varphi-\pi/2) \\ \sin(\varphi-\pi/2) \end{pmatrix}$のときは$\theta=2\varphi$とおくと$A=B(\theta)$となる。

FをM_0^+に制限した写像がM_0^+から$SO(2)$への同型写像を与える。∎

命題 2.2 $M(\boldsymbol{a})=\{\,f\in M \mid\ f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\,\}$すると，$M(\boldsymbol{a})\cong M_0$である。また$M(\boldsymbol{a})^+=\{\,f\in M^+ \mid\ f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\,\}$とすると，$M(\boldsymbol{a})^+\cong M_0^+$である。

証明　$F: M_0\to M(\boldsymbol{a})$を$f\in M_0$に対し$F(f)(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}$で定義する。このとき実際$F(f)\in M(\boldsymbol{a})$で$F$が$M(\boldsymbol{a})$への写像である事が分かる。$f,g\in M_0$に対し$F(fg)(\boldsymbol{x})=fg(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=f\left((g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\right)+\boldsymbol{a}=f(F(g(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{a}))+\boldsymbol{a}=F(f)(F(g)(\boldsymbol{x}))=\left(F(f)F(g)\right)(\boldsymbol{x})$となるので$F(fg)=F(f)F(g)$となる。$G(f)=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}$が$F$の逆写像になるので上への一対一写像である事が分かる。∎