情報数理 I 要綱 #5

河野

n を 3 以上の自然数とする。X_n を正 n 角形とする。ただし重心は原点にあり，頂点の 1 つは x 軸上に乗っているものとする。$D_n = M(X_n) = \{\, f \in M \mid\ f(X_n) = X_n \,\}$ とおく。以下群 D_n を決定しよう。

τ を x 軸での折り返しで与えられる写像とする。σ を原点を中心とする $\dfrac{2\pi}{n}$ 回転で与えられる写像とする。$\tau, \sigma \in D_n$ は明らか。$o(\tau) = 2$, $o(\sigma) = n$ である。また $\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{n-1}$ が成り立つので，前節で学んだように $\langle\, \sigma, \tau \,\rangle$ の構造は分かっているといってよい。

命題 2.3 $D_n = \langle\, \sigma, \tau \,\rangle$

証明 X_n の頂点を $1, 2, \ldots, n$ とする。ただし 1 は x 軸上の頂点とし，反時計回りに $2, \ldots, n$ と決める。D_n の元 f は頂点を頂点に移すので $N(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上の置換を定める。$f(1) = k + 1$ とおくと，$f(2) = k + 2$ または $f(2) = k$ である。この 2 点の行き先を決めると写像は一意的に決まる。$f(1) = k + 1, f(2) = k + 2$ のときを考える。σ^k は $\sigma^k(1) = k + 1$, $\sigma^k(2) = k + 2$ となる。よって $f = \sigma^k$ となる。$f(1) = k + 1$, $f(2) = k$ のときを考える。$\sigma^k\tau(1) = \sigma^k(1) = k + 1$, $\sigma^k\tau(2) = \sigma^k(n) = k$ となるよって $f = \sigma^k\tau$ となる。いずれの場合も $f \in \langle\sigma, \tau\rangle$ なので $D_n = \langle\sigma, \tau\rangle$ となる。 ∎

D_n を **2 面体群** (*dihedral group*) と呼ぶ。D_n の位数は $2n$ であり，位数 n の巡回部分群 $C_n = \langle\sigma\rangle$ を部分群として含む。2 面体群 D_n は正 n 角形の対称性を表現する群という事ができる。

図 1 の様に多角形から角を生やした図形を H_n とおくと (図 1 は $n = 4$)，$M(H_n) = C_n$ となる。

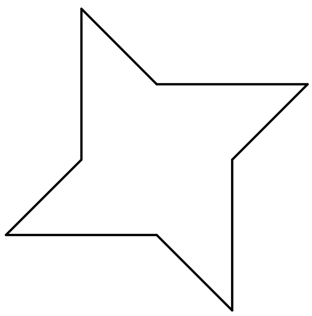

図 1

演習問題 2.2 $M(H_n) = C_n$ を証明せよ。

演習問題 2.3 多角形の対称性は $n \geqq 3$ という条件が必要であったが，多角形という条件をはずせば D_2, C_2, D_1, C_1 を対称性を表現する群として持つような図形は存在する。そのような図形をそれぞれの群について 1 つ探せ。

$M(X) = \{\, f \in M \mid\ f(X) = X \,\}$ が D_n となる様な図形 X は沢山存在する。たとえば星型 S は $M(S) = D_5$ となる。この例から想像されるように，対称性を表現する群を 1 つ固定したとき，そ

の群を「対称性として持つ」図形は沢山あり，それを決定する事は難しい。しかし逆に図形は色々あるが，その図形の対称性はそれほど多くない事が分かる。

定理 2.4 X を平面内の図形とする。$M(X) = \{\, f \in M \mid\ f(X) = X \,\}$ が有限群のとき 2 面体群か巡回群である。

最初に有限群という制限を付けた事について一言述べておく。X が有界な集合でない場合，例えば $X = \left\{\, (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\ -1 \leqq y \leqq 1 \,\right\}$ とする。x 軸に関する折り返し τ と x 軸に沿って $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ だけ平行移動させる写像 $f_{\boldsymbol{x}}$ は $M(X)$ に属する。$T = \{\, f_{\boldsymbol{x}} \mid\ x \in \boldsymbol{R} \}$, $S = T \cup \{\tau\}$ とすると，$M(X) = \langle\, S \,\rangle$ が分かり，これは無限群になる。そこで図形を有界なものに限ると，図形を固定する写像は，その図形の重心を固定するので，重心を原点に置いておけば，原点を固定する。即ち図形 X に対し $M(X)$ は M_0 の部分群になる。

実は $\boldsymbol{R}^2$ の有界な「たちのいい」集合 (我々はそれを図形と定義せずに呼んで来たのだが) に対し X が円の場合を除いて $M(X)$ は有限群になる。しかしこの事実を示すためには「たちのいい」という事をきちんと定義しなくてはならない。ここではそのことをしたくないので (やるのはちょっと大変) 有限群という制限を付ける。

証明の前に $M(X)$ が無限群になる例をあげておこう。r を無理数とする。例えば $\sqrt{2}$ 等でよい。$X = \left\{\, (\cos nr, \sin nr) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\ n \in \boldsymbol{Z} \,\right\}$ とすると，$h(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos r & -\sin r \\ \sin r & \cos r \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$ とおくと，$h \in M(X)$ となり，$o(h) = \infty$ なので $M(X) \geqq \boldsymbol{Z}$ となる。

演習問題 2.4　上の事実を証明せよ。

定理の証明に入ろう。幾つかの事実を証明しながら定理を証明しよう。最初に向きを保つ写像に関して定理を証明しよう。即ち「G を M^+ の有限部分群とすると $G \cong C_n$ である」事を示そう。

M^+ の元は (1) 単位元，(2) 回転，(3) 平行移動の 3 種類であった。平行移動は位数無限なので G の元にはなれない。

Fact 1 :　$f \in M(\boldsymbol{a})$, $g \in M$ のとき $gfg^{-1} \in M(g(\boldsymbol{a}))$

$gfg^{-1}(g(\boldsymbol{a})) = g(\boldsymbol{a})$ が分かるので，$gfg^{-1} \in M(g(\boldsymbol{a}))$ である。

Fact 2 :　$f \in M^+(\boldsymbol{a}) - \{id\}$, $g \in M^+(\boldsymbol{b}) - \{id\}$ で $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ ならば $\langle\, f, g \,\rangle$ は無限群である。

簡単のため $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}$ は x 軸の正の部分にあるとしても一般性を失わない。$\{\, g^n(\boldsymbol{a}) \mid\ n \in \boldsymbol{Z} \,\}$ という集合を考える。この集合は $\boldsymbol{b}$ を中心とする円周上にある $o(g)$ 個の点からなる。この中には x 座標が $\boldsymbol{b}$ の x 座標より大きい点 $g^{n_1}(\boldsymbol{a})$ が存在する。この点を $\boldsymbol{a}_1$ とおくと Fact 1 より $f_1 = g^{n_1} f g^{-n_1} \in M^+(\boldsymbol{a}_1) - \{id\}$ である。次に $\{\, f_1^n(\boldsymbol{b}) \mid\ n \in \boldsymbol{Z} \,\}$ という集合を考える。この集合は $\boldsymbol{a}_1$ を中心とする円周上にある $o(f_1)$ 個の点からなる。この中には x 座標が $\boldsymbol{a}_1$ の x 座標より大きい点 $f^{m_1}(\boldsymbol{a}_1)$ が存在する。この点を $\boldsymbol{b}_1$ とおくと Fact 1 より $g_1 = f^{m_1} g f^{-m_1} \in M^+(\boldsymbol{b}_1) - \{id\}$ である。次に $\{\, g_1^n(\boldsymbol{a}_1) \mid\ n \in \boldsymbol{Z} \,\}$ という集合を考える。この集合は $\boldsymbol{b}_1$ を中心とする円周上にある $o(g_1)$ 個の点からなる。この中には x 座標が $\boldsymbol{b}_1$ の x 座標より大きい点 $g_1^{n_2}(\boldsymbol{a}_1)$ が存在する。この点を $\boldsymbol{a}_2$ とおくと Fact 1 より $f_2 = g_1^{n_2} f_1 g^{-n_2} \in M^+(\boldsymbol{a}_2) - \{id\}$ である。これを繰り返すと M の元の列 $f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots$ とベクトルの列 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2, \ldots$ が得られる。f_i は $\boldsymbol{a}_i$ の回りの回転，g_i は $\boldsymbol{b}_i$ の回りの回転であり，ベクトルはすべて異なる。$f_i, g_i \in \langle\, f, g \,\rangle$ なので $\langle\, f, g \,\rangle$ は無限群になる。

Fact 2 より G が異なる点における回転である元達を含むことはない。よってある点 $\boldsymbol{a}$ が存在して, $G < M^+(\boldsymbol{a})$ としてよい。特に $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ としても一般性を失わないので $G < M_0^+ \cong SO(2)$ としてよい。$SO(2)$ の中には G と同型な部分群 G' が存在するので $G < SO(2)$ とみなしてもかまわない。$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \ 0 \leqq \theta < 2\pi \right\}$ G の各元 g はある実数 $\theta(g)$ (ただし $0 \leqq \theta(g) < 2\pi$) を用いて $g = \begin{pmatrix} \cos\theta(g) & -\sin\theta(g) \\ \sin\theta(g) & \cos\theta(g) \end{pmatrix}$ と書ける。この $\theta(g)$ の中で正で最小の $\theta(g)$ を与える元を h とする。

Fact 3 : $G = \langle\, h \,\rangle$ である。

$id \in \langle\, h \,\rangle$ は明らかなので，$g \neq id$ とする。$g = \begin{pmatrix} \cos\theta(g) & -\sin\theta(g) \\ \sin\theta(g) & \cos\theta(g) \end{pmatrix}$ とすると，$\theta(g) \geqq \theta(h)$ である。$\theta(h), 2\theta(h), 3\theta(h), \ldots$ を考えると $n\theta(h)$ はいつかは $\theta(g)$ を超える。その直前の n の値を k とすると，$\varphi = \theta(g) - k\theta(h)$ は $0 \leqq \varphi < \theta(h)$ である。

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(g) & -\sin\theta(g) \\ \sin\theta(g) & \cos\theta(g) \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta(h) & -\sin\theta(h) \\ \sin\theta(h) & \cos\theta(h) \end{pmatrix}^k \right\}^{-1}$$

より $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in G$ である。$0 < \varphi$ なら h の選び方に矛盾するので，$\varphi = 0$，即ち $\begin{pmatrix} \cos\theta(g) & -\sin\theta(g) \\ \sin\theta(g) & \cos\theta(g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(h) & -\sin\theta(h) \\ \sin\theta(h) & \cos\theta(h) \end{pmatrix}^k$，即ち $g = h^k$ となる。

以上で M^+ の有限部分群が巡回群 C_n と同型で，しかもある点の回りの回転である事が分かった。

次に M の有限部分群 G を考える。$G^+ = G \cap M^+$ を考える。$G^+ = G$ ならば $G \subseteq M^+$ なので，G は有限巡回群である。よって $G > G^+$ とする。

命題 1.17 の証明をみると剰余類の個数が有限であれば, 有限でない群についても適用できる事がわかるので，$|GM^+ : M^+| = |G : G^+|$ が成立する。$|M : M^+| = 2$ より $GM^+ = M$ となり，$|G : G^+| = 2$ が分かる。G^+ は M_0^+ の巡回部分群 C_n としてよい。$\tau \in G - G^+$ は向きを逆にする写像で，スライド折り返しではありえないので，折り返しである。$n = 1$ のときは $G^+ = \{id\}$ なので $G = \{\tau\}$ となり，$G \cong D_1$ となる。よって $n \neq 1$ とする。σ を G^+ の生成元とする。$\mathrm{Fix}(\tau) = \ell$ が $\mathbf{0}$ を含まないとする。$\tau\sigma\tau^{-1} \in M(\tau(\mathbf{0}))$ で $\tau(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ となるので $\langle\, \sigma, \tau\sigma\tau^{-1} \,\rangle$ は無限群になるが，G の部分群なので矛盾。よって $\mathbf{0} \in \ell$ となっている。このとき $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$ が分かる。$G = \langle \sigma, \tau \rangle$ であり，$o(\sigma) = n, o(\tau) = 2, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$ となる事が分かる。これは 2 面体群である。∎