情報数理 I 要綱 #6　　河野

3　空間における対称性

この節では空簡における対称性を調べよう。そのために最初に $M(3)$ の元がどのようなものであるかを調べる。$M(3)$ を忘れた人のためにもう一度定義を書いておこう。f を 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ 自身への写像で距離を保つもの，即ち $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ が成立しているとする。このような写像 f 全体が作る集合を $M(3)$ と書き (3 **次元**) **合同変換群**という。群という言葉をつかったのは写像の合成に関して群をなすからである。

2 次元の場合と同様に次の事が成立する。

命題 3.1 $M(3)$ の元 f は $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ $(A \in O(3))$ という形をしている。逆にこの形をしていれば $M(3)$ の元である。

略証　2 次元の場合とほぼ同様であるので，省略部分を含んだ証明を与える。この命題と次の命題の証明には線型代数の知識を使うので，その事を確認しながら論を進めていこう。まず $O(3)$ の定義を復習しておこう。$O(3)$ の元は直交行列と呼ばれる 3 次行列 A 全体からなる。A が直交行列とは $A^tA = E$ が成立する事をいう。A が直交行列であるとは次の事と同値である ; $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ と書くと，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の**正規直交基底**である。正規直交基底とは基底を構成する各ベクトルの長さが 1 で，お互いに直交している基底をいう。この場合 $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1 \cdots, 3)$ を満たしている。任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対し，$A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3$ なので，$\|A\boldsymbol{x}\|^2 = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$ を計算する事により次が得られる。ただし，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ の内積を表す。

Fact 1 :　$A \in O(3)$ である必要十分条件は $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$; $\|A\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ である。

最初に「逆」の部分を証明する。$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \quad (A \in O(3))$ という形をしているとする。このとき任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| = \|A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} - (A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b})\| = \|A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\|$ となる。このとき Fact 1 より $\|A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ となるので，$f \in M(3)$ が分かる。

$f \in M(3)$ とする。$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{b}$ とおく。T を $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ で定義すると $T \in M(3)$ なので $g = fT$ とおくと，$g \in M(3)$ である。この g に対しある直交行列 $A \in O(3)$ が存在して，$g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と書ける事を示せば命題が示される。

Fact 2 :　3 次行列 $A \in \mathrm{GL}(3)$ が存在して $g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる。

Fact 2 を示すためには g が線型写像である事，即ち (1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{y})$ と (2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α に対し $g(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha g(\boldsymbol{x})$ が成立する事を確認すればよい。そのためには 2 次元の場合と同様に，長さの保存を性質を用いて (a) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $g(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})) = \frac{1}{2}(g(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{y}))$ と (b) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α に対し $g(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha g(\boldsymbol{x})$ を示せばよい。

この行列 A が直交行列である事を示せば，証明は終わる。$g(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ より任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\|g(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が成立している事を注意しておく。

Fact 3 :　任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $(g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

この事実は $\|g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2 = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2$ を内積を使って表現する事により得られる。

$A = (\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3)$ とおくと，$\boldsymbol{a}_i = g(\boldsymbol{e}_i)$ であり，Fact 3 より $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ が従い，$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ が得られる。∎

命題 3.2 $M(3)$ の元は次のタイプのいずれかである。
(1) 恒等写像 id
(2) 平行移動
(3) 直線 ℓ に関する回転
(4) スライド回転
(5) 平面に関する折り返し
(6) スライド折り返し
(7) 回転折り返し

証明の前に各写像を説明しよう。(1) 恒等写像は説明の必要はないだろう。(2) もほとんど明らか。一応書くとあるベクトル $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ を 1 つ固定する。このベクトルに対し $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ で定義される写像は $M(3)$ の元になる。これを**平行移動**と呼ぶ。

(3) 直線 ℓ に関する回転もほとんど明らかであろう。3 次元空間内にある直線 ℓ があり，その直線に関する角度 θ の回転となっている写像は $M(3)$ の元となっている。例えば直線 ℓ_0 を x 軸とすると，ℓ_0 の回りの θ 回転が表す写像 f_0 は，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とするとき，$f_0(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となっている。$g \in M(3)$ を任意にとってきて，$\ell = g(\ell_0)$ とおく。このとき $f = gf_0g^{-1}$ は直線 ℓ に関する θ 回転になっている (補題 3.3 も参考の事)。逆に f を直線 ℓ に関する θ 回転とする。このとき直線 ℓ_0 を直線 ℓ に写す $M(3)$ の元 g が存在して，$f = gf_0g^{-1}$ となっている。

(4) スライド回転とは，(3) の直線 ℓ に関する回転の後，直線 ℓ 方向の平行移動を行って得られる写像をいう。

(5) 平面 P に関する折り返しは，平面が鏡だと思って点を鏡に映った点に写す写像の事である。例えば yz 平面を P_0 とすると，P_0 に関する折り返しが表す写像 f_0 は，$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，$f_0(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となっている。$g \in M(3)$ を任意にとってきて，$P = g(P_0)$ とおく。このとき $f = gf_0g^{-1}$ は平面 P に関する折り返しになっている。逆に f を直線 P に関する折り返しとする。このとき平面 P_0 を平面 P に写す $M(3)$ の元 g が存在して，$f = gf_0g^{-1}$ となっている。

(6) スライド折り返しとは，(5) の平面 P に関する折り返しの後，平面に属するベクトルに関する平行移動を行って得られる写像をいう。

平面 P とそれに直交する直線 ℓ を考える。(7) 回転折り返しとは，平面 P に関する折り返しの後，直線 ℓ に関する回転を行って得られる写像をいう。

(1)–(4) は向きを保つ写像，(5)–(7) は向きを逆にする写像である。また固定点は (1)$\mathrm{Fix}(f) = \boldsymbol{R}^3$, (2)$\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$, (3)$\mathrm{Fix}(f) = \ell$, (4)$\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$, (5)$\mathrm{Fix}(f) = P$, (6)$\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$, (7)$\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{point}$ となっている。(2) と (4) を除いて, 向きを保つかどうかと固定点の状況により何に属するかが分かる。

補題 3.3 $f, g \in M(3)$ とするとき，f の命題 3.2 のタイプと gfg^{-1} のタイプは同じである。

証明の前に固有値・固有ベクトルと 3 角化に関して復習しておこう。A を 3 次行列とする。実数 λ とゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となるとき，λ を A の**固有値**，$\boldsymbol{x}$ を λ に属する A の**固有ベクトル**といった。$\Phi(t\,;A) = \det(tE - A) = 0$ を A の**固有方程式**といい，この方程式の実数解は固有値になる。

$\Phi(t\,;A) = 0$ は 3 次式なので，少なくとも 1 つは実数解を持つ。3 次行列 A は少なくとも 1 つ固有値を持つ。それを λ とする。λ に属する A の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする。

今までは一般の行列であったが，以後 A は直交行列とする。$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ であり，$\|A\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ なので $\lambda = \pm 1$ が得られる。

直交行列は一般的には対角化可能でない。そこで 3 角化を試みる。λ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ とおく。$\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ を長さが 1 で，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が互いに直交する様に選ぶ。このとき $P = (\boldsymbol{x}_1\,\boldsymbol{x}_2\,\boldsymbol{x}_3)$ とおくと $P \in O(3)$ で $\boldsymbol{x}_1$ が固有ベクトルである事から，$AP = A(\boldsymbol{x}_1\,\boldsymbol{x}_2\,\boldsymbol{x}_3) = (A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, A\boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{x}_1\,\boldsymbol{x}_2\,\boldsymbol{x}_3)\begin{pmatrix} \lambda & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ となる。よって $\begin{pmatrix} \lambda & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ となるので $\begin{pmatrix} \lambda & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \in O(3)$ が分かる。この行列を A' とおく。$A' \in O(3)$ なので，$b_{12} = b_{13} = 0$ が分かる。$B = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とおくと，$B \in O(2)$ が分かる。$B \in O(2)$ に対して $Q' \in O(2)$ が存在して $Q'^{-1}BQ' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。$Q = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & Q' \end{pmatrix}$ とおくと $Q \in O(3)$ で $Q^{-1}A'Q = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & Q'^{-1}BQ' \end{pmatrix}$ となる以上をあわせると次が得られる (PQ を改めて P とおく)。

$A \in O(3)$ に対し $P \in O(3)$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{または} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は直交行列で行列 A に対し行列 $R^{-1}AR$ は 1 行目と 3 行目，1 列目と 3 列目を入れ換えた行列になっている。他の行・列についても同様な行列が存在する。

$\lambda = \pm 1$ なので，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ は座標の入れ替えで $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ま

たは $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に変形できる。よって次が成立する。

> $A \in O(3)$ に対し $P \in O(3)$ が存在して $P^{-1}AP$ は次のいずれかになる。
>
> (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \neq 0)$
>
> (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \neq 0)$

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ と定義し行列 A の**トレース**という。計算より $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$ が成立する事が分かる。A がどのタイプになるかは行列式とトレースから分かる。即ち (1) $\Longleftrightarrow \det(A) = 1, \mathrm{Tr}(A) = 3$, (2) $\Longleftrightarrow \det(A) = 1, \mathrm{Tr}(A) < 3$, (3) $\Longleftrightarrow \det(A) = -1, \mathrm{Tr}(A) = 1$, (4) $\Longleftrightarrow \det(A) = -1, \mathrm{Tr}(A) < 1$ が成立している。

今までの議論は代数的議論であったが，これを座標変換の話に翻訳しよう。空間に xyz 座標系が与えられているとする。この座標系に関する基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とする。この座標系で $f \in M(3)$ が $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ と書かれているとき，別の座標系で書き表したときどうなるかを考える。

別の直交座標系 $x'y'z'$ を考える。$x'y'z'$ 座標に関する基本ベクトルを $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ とし，$F = (\boldsymbol{f}_1\ \boldsymbol{f}_2\ \boldsymbol{f}_3)$ とおく。このとき F は直交行列になっている。ベクトル $\boldsymbol{x}$ が xyz 系で $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と表されている事を成分表示を用いずに表すと，$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ である。これは $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とも書ける。その $\boldsymbol{x}$ が $x'y'z'$ 系では $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ と表されているとき $\boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{f}_1 + x'_2\boldsymbol{f}_2 + x'_3\boldsymbol{f}_3$ となっている。これは $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{f}_1\ \boldsymbol{f}_2\ \boldsymbol{f}_3)\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ とも書ける。

$(\boldsymbol{f}_1\,\boldsymbol{f}_2\,\boldsymbol{f}_3)=(\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_3)F$ と書けるので，$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{f}_1\,\boldsymbol{f}_2\,\boldsymbol{f}_3)\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=(\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_3)F\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}$ となり，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}$ となる。

$f(\boldsymbol{x})$ を xyz 系で表したとき $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, $x'y'z'$ 系で表したとき $\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\\y_3'\end{pmatrix}$ とすると同様に $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\\y_3'\end{pmatrix}$ となる。よって

$$\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\\y_3'\end{pmatrix}=F^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=F^{-1}\left(A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)=F^{-1}AF\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}+F^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

を得る。以上により次が分かる。

> $x'y'z'$ 座標に関する基本ベクトルを $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3$ とし，$F=(\boldsymbol{f}_1\,\boldsymbol{f}_2\,\boldsymbol{f}_3)$ とおく。
> xyz 座標で $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ と表されている写像 f は $x'y'z'$ 座標では
> $f(\boldsymbol{x}')=F^{-1}AP\boldsymbol{x}'+F^{-1}\boldsymbol{b}$ と表される。

命題 3.2 の証明： $f\in O(3)$ を任意に取ってくる。前述の線型代数の議論より適当に座標系取り直せば $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ で A は前の 4 つのタイプのいずれかとしてよい。

(1) $A=E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ のとき: $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ となっている。$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ のとき f は (1) 恒等写像 id であり，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ のとき (2) 平行移動になっている。

(2) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ $(\theta\neq 0)$ のとき：$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\\boldsymbol{b}_1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\\boldsymbol{x}_1\end{pmatrix}$ とおく。ただし，$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}b_2\\b_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とおいている。このとき $A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}x_1+b_1\\A(\theta)\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{b}_1\end{pmatrix}$ となっている。$\theta\neq 0$ なので $\boldsymbol{a}_1=(E-A(\theta))^{-1}\boldsymbol{b}_1$ とおくと

$$A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}x\\A(\theta)(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{a}_1)+\boldsymbol{a}_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\0\\0\end{pmatrix}$$

よって $b_1=0$ のとき (3) 回転で，回転軸は $\boldsymbol{a}_1$ を通り，$y'z'$ 平面に直交する直線である。$b_1 \neq 0$ のときは (4) スライド回転になっている。

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ のとき：(2) と同様に $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}_1$ 等を定め計算すると，

$$A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -\left(x-\frac{1}{2}b_1\right)+\frac{1}{2}b_1 \\ A(\theta)(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{a}_1)+\boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix}$$

となる。このときは (7) 回転折り返しになっている。

(4) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \neq 0)$ のとき：(2) と同様に $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}_1$ 等を定め計算すると，

$$A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -\left(x-\frac{1}{2}b_1\right)+\frac{1}{2}b_1 \\ \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{b}_1 \end{pmatrix}$$

となる。このとき $\boldsymbol{b}_1=0$ なら (5) 折り返し，$\boldsymbol{b}_1 \neq 0$ なら (6) スライド折り返しになっている。 ∎

命題 3.2 より f の元は 7 つのタイプのどれかである事が分かったが，f が $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ の形で与えられたとき，どのタイプになるか考えよう。命題の証明をよく見て考えると，次の事実が証明されている事が分かる。

(A) $\det(A)=1, \mathrm{Tr}(A)=3$ のとき，$A=E$ が分かり $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ の形をしている。$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ のとき恒等写像，そうでないとき平行移動である。

(B) $\det(A)=1, \mathrm{Tr}(A)<3$ のとき f は回転またはスライド回転であるが，$\boldsymbol{b}$ が固有ベクトル方向の成分を持たないとき回転，そうでないときスライド回転になる。回転軸は固有ベクトル方向である。

(C) $\det(A)=-1, \mathrm{Tr}(A)=1$ のとき折り返しまたはスライド折り返しとなる。$\boldsymbol{b}$ が，-1 に対応する固有ベクトル方向の成分を持たなければ折り返し，持てばスライド折り返しになる。折り返しの平面は-1 に対応する固有ベクトルと直交している。

(D) $\det(A)=-1, \mathrm{Tr}(A)<1$ のとき回転折り返しになる。折り返しの平面は固有ベクトルと直交している。