# 情報数理 I 要綱 #7

河野

正 4 面体の対称性を表す群を決定しよう。色々な方法が考えられるが，ここでは球面の分割を用いる方法で決定を試みる。正 4 面体の 4 つの頂点を $A, B, C, D$ とする。今 4 つの頂点は半径 1 の球面上 $S^2$ に乗っていると仮定する。正 4 面体の 1 つの面, 例えば $ABC$ を考える。原点を $O$ とする。原点からこの 3 角形 $ABC$ を球面 $S^2$ に射影した図形を考え，これを**球面 3 角形**と呼ぶ。原点 $O$ を通る平面と球面の共通部分を**大円**と呼ぶ。球面 3 角形は大円の一部で囲まれた図形になっている。この射影を各面で行うと，球面の球面 3 角形による分割が得られる。これを更に分割しよう。球面 3 角形 $ABC$ を考える。この 3 角形の中心の点 ($A, B, C$ から等距離にある点) を $P$ とし，$AP$ を通る大円と $BC$ の交わる点を $A'$ とする。同様に $B', C'$ を考え，$AA', BB', CC'$ で球面 3 角形 $ABC$ を 6 つに分割する。これを各面に関して行う。全体で 24 個の球面 3 角形による球面の分割が得られる。分割された 3 角形の 1 つを $\Delta$ とし，正 4 面体を固定する元全体が作る群を $G$ とする。このとき次の命題が成立する。

**命題 3.4** (1) $\displaystyle\bigcup_{g\in G} g(\Delta) = S^2$

(2) 任意の $g, h \in G$ に対し $g(\mathring{\Delta}) \cap h(\mathring{\Delta}) \neq \emptyset$ ならば $g = h$ が成立する。ただし $\mathring{\Delta}$ は $\Delta$ の内点で，$\mathring{\Delta} = \Delta - \partial\Delta$ である。

**略証**　(1) は明らかであろう。(2) は次の (2') と同値である事に注意すれば出て来る。

(2') 任意の $g \in G$ に対し $g(\mathring{\Delta}) \cap \mathring{\Delta} \neq \emptyset$ ならば $g = id$ が成立する。 ∎

命題 3.4 の (1)，(2) が成立しているとき $(G, \Delta)$ を**球面の埋め尽くし**と呼ぶ事にしよう。このとき $g$ と $g(\Delta)$ を対応させる事により $G$ と埋め尽くしを構成する球面 3 角形の集合の間に一対一対応がある。球面 3 角形は 24 個あるので，$G$ の位数は 24 である事がわかる。

群 $G$ の構造を考えよう。正 4 面体の頂点を改めて $1, 2, 3, 4$ とおくと，$G$ の元 $f$ を 4 次対称群 $S_4$ の元と考える事ができる。この対応は一対一で $S_4$ の上への写像になるので $G \cong S_4$ となる。正 4 面体以外ではこの対応は上への写像にはならない。そこで一般的に議論できる方法を考える。球面 3 角形 $\Delta$ の 3 辺を $e_1, e_2, e_3$ とし，$e_i$ がのっている大円 (が乗っている平面) に関する折り返しを $\tau_i$ とすると，$\tau_i \in G$ となっている。ここで $e_2$ と $e_3$ が直交する様に選んでおく。$\tau_i$ は折り返しなので，$\tau_i^2 = id$ となる。$e_1$ と $e_2$ の交点を $P_3$ とすると，$\tau_1\tau_2$ は点 $P_3$ と原点を通る直線に関する $\dfrac{2\pi}{3}$ 回転となるので，$(\tau_1\tau_2)^3 = id$ となる。群 $G$ は $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ で生成され，その間に成立する関係式として

$$\tau_1^2 = \tau_2^2 = \tau_3^2 = id \quad (\tau_1\tau_2)^3 = (\tau_2\tau_3)^2 = (\tau_3\tau_1)^3 = id$$

代数的にはこれらの関係式から群の構造が決定される。この群を**重三角形群**と呼び，$\Delta^*(2, 3, 3)$ と書く。一般に $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ で生成され，関係式として

$$\tau_1^2 = \tau_2^2 = \tau_3^2 = id \qquad (\tau_1\tau_2)^p = (\tau_2\tau_3)^q = (\tau_3\tau_1)^r = id$$

のみを持つ群を重三角形群といい，$\Delta^*(p, q, r)$ と書く。また，$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ で生成され，関係式として

$$\sigma_1^p = \sigma_2^q = \sigma_3^r = id \qquad \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = id$$

のみを持つ群を**三角形群**といい，$\Delta(p, q, r)$ と書く。

$X = \Delta \cup \tau_2(\Delta)$ とおくと，$(\Delta(2,3,3), X)$ は球面の埋め尽くしになっている。

**演習問題 3.1**　上の議論を参考にして，正 6 面体の対称性を表す群の位数を求めよ。またその群を決定せよ。

**演習問題 3.2**　上の議論を参考にして，正 8 面体の対称性を表す群の位数を求めよ。またその群を決定せよ。

**演習問題 3.3**　上の議論を参考にして，正 12 面体の対称性を表す群の位数を求めよ。またその群を決定せよ。

**演習問題 3.4**　上の議論を参考にして，正 20 面体の対称性を表す群の位数を求めよ。またその群を決定せよ。