情報数理 I 要綱 #8

河野

正多面体群に関して調べたが，$M(3)$ の有限部分群がどの様なものがあるか調べよう。そのために球面幾何を少し学ぶ。

$S^2 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \|\boldsymbol{x}\| = 1 \right\}$ を半径 1 の球面とする。平面で幾何学を考えたように球面上で幾何学を考える。平面上の点に対応するのは球面上の点であるが，平面上の直線に対応するものは何であろう。直線は 2 点間の最小の道のりを与えるという性質に着目する。この性質を持つものは，原点を通る平面とこの球面の共通部分である円である。この様な円を**大円**と呼ぶ。

平面で 2 点を通る直線が唯 1 本存在したように，球面上でも 2 点を通る大円が存在するが，唯 1 本には例外点がある。2 点が対称点 (地球でいうと北極点と南極点) だと無限に存在する。それ以外は唯 1 本存在する。平面上の直線では平行線というものが存在したが，球面上の「直線」(大円の事をそう呼ぶ。) には平行線が存在しない。平面では 2 点を決めると線分が一意的に決まった。球面では「線分」AB を「直線」AB の点 A から B までのと定義すると，2 方向考えられる。2 点が対称点でないときは，断わらなければ短い方を指すことにしておこう。

球面上の直線 ℓ と ℓ' のなす角を定義する。ℓ は空間内のある平面 P と球面の共通部分になっている。ℓ' も同様にある平面 P' との共通部分になっている。このとき平面 P と P' のなす角を直線の間の角とする。

球面上に 3 点を決める。2 点を通る線分 (直線の 2 点ではさまれた部分) を 3 本引くことができる。これで得られる図形を**球面 3 角形**という。

命題 3.5 球面 3 角形の 3 つの角を A, B, C とし，面積を S とすると，$S = A + B + C - \pi$ が成立する。

$A + B + C - \pi$ を**球面剰余**と呼ぶ事がある。この命題は球面剰余が面積に等しい事を示している。この命題から従う事実として，**「3 角形の内角の和は π より大きい」**がある。ここでは証明しないが正弦定理，余弦定理と呼ばれる次の定理も存在する。

定理 3.6 3 角形の 3 つの角を A, B, C とする。角 A の対辺の長さを a，角 B の対辺の長さを b，角 C の対辺の長さを c とすると

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

が成立する。また

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \end{aligned}$$

が成立する。

$M(3)$ の有限部分群 G にどの様なものがあるか考えよう。次の命題が成立する。

命題 3.7 G を $M(3)$ の有限部分群とするとある共通固定点が存在する。即ち，$\exists p \in \boldsymbol{R}^3, \forall g \in G\,;\, \mathrm{Fix}(g) \ni p$

この命題の証明のため次の補題を用いる。

補題 3.8 $f, g \in M(3)$ である軸に関する回転とする。$\mathrm{Fix}(f) \cap \mathrm{Fix}(g) = \emptyset$ ならば $\langle\, f, g\,\rangle$ は無限群である。

略証　$\mathrm{Fix}(f) = \ell, \mathrm{Fix}(g) = \ell'$ とする。$\forall h \in M(3)$ に対し hfh^{-1} は $h(\ell)$ に関する回転である。同様に hgh^{-1} は $h(\ell')$ に関する回転である。gfg^{-1} は $g(\ell)$ に関する回転であるが，f とも，g とも異なっている。以下順に異なる $\langle\, f, g\,\rangle$ の元を見つける事ができる。∎

命題 3.7 の略証　最初に G の元がすべて向きを保つ場合を考える。G の恒等写像ではない元 $g, g'g''$ を考える。$\mathrm{Fix}(g) = \ell, \mathrm{Fix}(g') = \ell', \mathrm{Fix}(g'') = \ell''$ とする。補題よりこれらは共通点を持つが，$\ell \cap \ell' = p, \ell' \cap \ell'' = q, \ell'' \cap \ell = r$ となっているとする。ただし $p.q.r$ は互いに異なる点とする。この状況から矛盾がでれば，証明が終る。$gg'g^{-1}$ の固定点は $\mathrm{Fix}(gg'g^{-1}) = g(\ell')$ であるが，補題より $g(\ell') \cap \ell'' \neq \emptyset$ でなくてはならない。このとき g は π 回転で $\ell \perp \ell''$ となる。この議論を g' と g'' に関して行うと g' が π 回転で $\ell' \perp \ell$ が従う。3 角形 pqr の 2 つの角が直角になるので矛盾。

次に G が向きを逆にする元を持つ場合を考える。$G^+ = \{\, g \in G \mid g$ は向きを保つ$\,\}$ とおくと，$|G : G^+| = 2$ である。$|G^+| = 1$ のとき，$G = \langle \tau \rangle$ で τ は折り返しまたは回転折り返し (回転角は π) なので命題は正しい。$|G^+| > 1$ とする。補題より $\exists p \in \boldsymbol{R}^3, \forall h \in G^+ ; \mathrm{Fix}(h) \ni p$ が成立する。τ を G^+ に属さない G の元とすると $G = \langle \tau, G^+ \rangle$ となっている。(共役類の議論より $G = G^+ + \tau G^+$ と書けている。)

$p \notin \mathrm{Fix}(\tau)$ を仮定する。$h \in G^+$ を id 以外の元とし，$\mathrm{Fix}(h) = \ell$ する。$\tau h \tau^{-1}$ も回転で軸は $\tau(\ell)$ $p \in \tau(\ell)$ なので，$\tau(\ell)$ は p と $\tau(p)$ を結ぶ直線である。ℓ 以外の軸をもつ元が G^+ に存在すると矛盾なので軸は ℓ のみこのとき P を折り返し平面とすると，$\ell \cap P = q$ を共通の固定点として取り直せばよい。

よって G^+ と τ は共通の固定点 p を持つとしてよい。このとき G^+ 以外の G の元 g は，ある元 h を用いて $g = \tau h$ と書けるので $p \in \mathrm{Fix}(g)$ が分かる。∎

G を $M(3)$ の有限部分群とすると，命題 3.7 より共通の固定点 $\boldsymbol{b}$ を持つ事が分かる。$h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ とおき，$H = hGh^{-1} = \left\{ hgh^{-1} \mid g \in G \right\}$ とおくと，H は $M_0(3) = \{\, f \in M(3) \mid f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}\,\}$ の有限部分群である。逆に $M_0(3)$ の有限部分群 H に対し $h^{-1}Hh$ は $\boldsymbol{b}$ を共通固定点にもつ有限部分群である。よって $M_0(3)$ の有限部分群を調べれば，$M(3)$ の有限部分群はすべて分かる。

$S^2 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1 \right\}$ とする。S^2 を固定する f は原点も固定するし，原点を固定する f は S^2 も固定する。

$M_0(3)$ の元は固定点を持つので，命題 3.2 より，(1) 恒等写像，(2) 回転，(3) 折り返し，(4) 回転折り返しのいずれかである。これらの写像を S^2 上に制限して考える。(1) 恒等写像はやはり恒等写像で $\mathrm{Fix}(id) = S^2$ となる。(2) 回転は 2 点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'$ を固定する。このとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}'$ は対称点になっている。回転角が θ のとき，この写像を $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}')$ の回りの θ 回転という。(3) 折り返しは折り返しの平面と交わる大円 (直線) を固定する。これをこの大円に関する折り返しと呼ぶ。この大円に最も遠い点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'$ (大円が赤道だとすると，北極点と南極点) をこの大円の極点と呼ぶ。(4) 回転折り返しは，ある大円で折り返し，その大円の極点に関して θ 回転したものになっている。補題 3.3 から，球面上の写像に関しても f と gfg^{-1} のタイプは同じである事が分かる。