Δ を球面 3 角形とする。$G = \Delta^*(p,q,r)$ を全三角形群とする。(G,Δ) が球面の埋め尽くしになっているものをすべて決定しよう。

命題 3.9 $G = \Delta^*(p,q,r)$ が全三角形群で，(G,Δ) が球面の埋め尽くしになっているとする。このとき次のいずれかである。
(1) $(p,q,r) = (p,2,2)$。
(2) $(p,q,r) = (3,3,2)$，G は正 4 面体の対称性を表す群である。
(3) $(p,q,r) = (4,3,2)$，G は正 6 面体または正 8 面体の対称性を表す群である。
(4) $(p,q,r) = (5,3,2)$，G は正 12 面体または正 20 面体の対称性を表す群である。

証明　3 角形を Δ とし，頂点を A,B,C とする。A,B,C に対応する角の角度を α,β,γ とする。辺 AB,BC,CA に関する折り返しをそれぞれ τ_1,τ_2,τ_3 とする。$\tau_3\tau_1$ は回転角 2α の回転となる。この元の位数を p とすると，$2\alpha = \dfrac{2\pi}{p}$, 即ち $\alpha = \dfrac{\pi}{p}$ となっている。以下 $\beta = \dfrac{\pi}{q}$, $\gamma = \dfrac{\pi}{r}$ とおく。球面剰余 $\alpha+\beta+\gamma-\pi = \left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}-1\right)\pi$ は正であり，球面を埋め尽くす 3 角形の数を N とすると，$4\pi = N\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}-1\right)\pi$ が成立している。

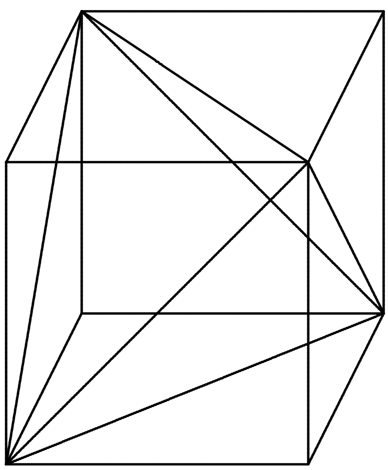
ここで $p \geqq q \geqq r > 1$ と仮定しても一般性を失わない。$r \geqq 3$ とすると $\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}-1\right) \leqq \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-1 = 0$ となるので矛盾。よって $r = 2$ である。

$q = 2$ の場合 p は 2 以上の任意の整数である。

$q \geqq 4$ のとき $\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}-1\right) \leqq \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}-1 = 0$ より矛盾，よって $q = 3$ である。またこのとき $p \leqq 5$ が分かる。

よって $(p,q,r) = (3,3,2)$ のとき $N = 24$ で，球面 3 角形の状況より G は正 4 面体の対称性を表す群である事が分かる。

$(p,q,r) = (4,3,2)$ のとき $N = 48$ で，球面 3 角形の状況より G は正 6 面体または正 8 面体の対称性を表す群である事が分かる。$(p,q,r) = (5,3,2)$ のとき $N = 120$ で，G は正 12 面体または正 20 面体の対称性を表す群であることが分かる。∎



全三角形群の間にも包含関係がある事が次のように分かる。例えば正 4 面体の内部に正 4 面体の頂点の一部を頂点にもつ正 4 面体が存在する。このことから $G = \Delta^*(4,3,2)$ は $\Delta^+(3,3,2)$ と同型な部分群 H を含む事が分かる。

演習問題 3.5　$G = \Delta^*(5,3,2)$ は $\Delta^*(4,3,2)$ と同型な部分群を含むか。

全三角形群及びその部分群は 3 次元のある図形の対称性を表している事が分かる ($\Longrightarrow$ 演習問題)。全三角形群の部分群にはならないような $M_0(3)$ の有限部分群が存在するかという問題を除いて，有限部分群はすべて決定された。この問題も演習問題として残しておく。

演習問題 3.6　全三角形群の部分群をすべて決定せよ。そしてその部分群が対称性を表しているような 3 次元図形を 1 つあげよ。

演習問題 3.7　全三角形群の部分群以外で $M_0(3)$ の有限部分群が存在すれば，それをすべて列挙せよ。またその群に対して，対称性を表しているような図形を 1 つあげよ。