数学序論要綱 #2　　2006–4–18　　河野

1.2　必要条件と十分条件

$P \Longrightarrow Q$ が**正しい命題**であるとき Q を P(であるため) の**必要条件** (*necessary condition*) であるという。また P は Q(であるため) の**十分条件** (*sufficient condition*) という。

$P \Longrightarrow Q$ と $Q \Longrightarrow P$ が共に正しいとき P は Q の必要条件でもあり十分条件でもある。このとき P は Q の**必要十分条件** (*sufficient and necessary condition*) であるという。このとき Q も P の必要十分条件である。

$P \Longrightarrow Q$ が真であり，$Q \Longrightarrow P$ が偽であるとき，P は Q の十分条件であるが，必要条件ではない。このとき Q は P の必要条件ではあるが，十分条件ではない。

$P \Longrightarrow Q$ と $Q \Longrightarrow P$ が共に正しくないとき P は Q の必要条件でも，十分条件でもない。このとき Q も P の必要条件でも，十分条件でもない。

演習問題 1.5　次において P は Q の「必要十分条件，必要条件ではあるが十分条件ではない，十分条件ではあるが必要条件ではない，必要条件でも十分条件でもない」のいずれかであるか決定せよ。ここで x, y は実数とする。
(1) $P : x^2 = 1, \quad Q : x = 1$
(2) $P : xy > 0, \quad Q : x > 0$ かつ $y > 0$
(3) $P : xy > 0, \quad Q : x > 0$ または $y > 0$
(4) $P : xy = 0, \quad Q : x = 0$ かつ $y = 0$
(5) $P : xy = 0, \quad Q : x = 0$ または $y = 0$
(6) $P : xy = 0$ かつ $y = x + 1, \quad Q : x = 0$ かつ $y = 1$
(7) $P : x^2 + 2x - 1 = 0$ かつ $x > 0, \quad Q : x = -1 + \sqrt{2}$

ここで論理の実際的練習として高次連立方程式を解くことを考える。次の連立方程式

$$y(1 - 2x^2 - y^2) = 0, \qquad x(1 - x^2 - 3y^2) = 0$$

を解くことを考える。$P \times Q = 0$ という式が成立するためには $P = 0$ または $Q = 0$ が成立していればよい。すでに学んだ用語を用いると $P \times Q = 0$ である必要十分条件は $P = 0$ または $Q = 0$ である。最初の式が成立する必要十分条件は $y = 0$ または $1 - 2x^2 - y^2 = 0$ である。$y = 0$ という命題を Y，$1 - 2x^2 - y^2 = 0$ という命題を A とすると $Y \vee A$ である。2 番目の式が成立する必要十分条件は $x = 0$ または $1 - x^2 - 3y^2 = 0$ である。$x = 0$ という命題を X，$1 - x^2 - 3y^2 = 0$ という命題を B とすると $X \vee B$ である。2 つの式が共に成立しているので，成立のための条件は

$$\begin{aligned}(Y \vee A) \wedge (X \vee B) &= ((Y \vee A) \wedge X) \vee ((Y \vee A) \wedge B) \\ &= (Y \wedge X) \vee (A \wedge X) \vee (Y \wedge B) \vee (A \wedge B)\end{aligned}$$

となる。よって $Y \wedge X$，$A \wedge X$，$Y \wedge B$，$A \wedge B$ の 4 つの場合を考えればよいことがわかる。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

最初は $Y\wedge X$ の場合を考える。このとき Y は $y=0$ を意味し，X は $x=0$ を意味するので，解として $x=0$ かつ $y=0$，すなわち $(x,y)=(0,0)$ を得る。

次に $A\wedge X$ の場合を考える。このとき A は $1-2x^2-y^2=0$ を X は $x=0$ を意味する。$x=0$ を $1-2x^2-y^2=0$ に代入すると，$y^2=1$ となる。よって $y=1$ または $y=-1$ であり，このときの解は $(x,y)=(0,1)$ または $(x,y)=(0,-1)$ である。これを $(x,y)=(0,\pm1)$ と書くこともある。

次に $Y\wedge B$ の場合を考える。このとき $y=0$ かつ $1-x^2-3y^2=0$ が成立している。$y=0$ を $1-x^2-3y^2=0$ に代入すると，$x^2=1$ となる。よって $x=1$ または $x=-1$ であり，このときの解は $(x,y)=(\pm1,0)$ となる。

最後に $A\wedge B$ の場合を考える。$1-2x^2-y^2=0$ かつ $1-x^2-3y^2=0$ が成立している。1 番目の式から 2 番目の式を引くと $-x^2+2y^2=0$ を得る。$x=\sqrt{2}y$ または $x=-\sqrt{2}y$ となるので，これをそれぞれ 2 番目の式に代入すると，$1-5y^2=0$ となり，それぞれの場合に $y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ または $y=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ を得る。よって $(x,y)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ または $(x,y)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ となる。以上により連立方程式の解は

$$(x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0),\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

である。

演習問題 1.6　次の連立方程式の解を求めよ。
(1) $x(x^2+y^2)=0$ かつ $y(x^2+y^2-1)=0$
(2) $x^3-x+y=0$ かつ $y^3+x-y=0$
(3) $(y-2x^2y)2^{-x^2-y^2}=0$ かつ $(x-2xy^2)2^{-x^2-y^2}=0$

1.3　任意と存在

この節では，数学的命題を叙述するとき重要な役割を果たしている「任意」[(1)]と「存在」について取上げる。数学的命題はきちんと述べようとすると「任意」と「存在」という用語が多く用いられる。例えば

関数 $y=f(x)=x^3-3x$ は $x=1$ で極小値をとる

という命題を考えよう。「$y=f(x)$ が $x=a$ で極小値をとる」ことのきちんとした定義は「解析学1」で学ぶが,「ある正の実数 δ が存在して，任意の実数 x に対し $0<|x-a|<\delta$ ならば $f(a)<f(x)$ が成立する」[(2)]ことである。上の命題は

> $y=f(x)=x^3-3x$ とする。このときある正の実数 δ が存在して，任意の実数 x に対し $0<|x-1|<\delta$ ならば $f(1)<f(x)$ が成立する。

という事を意味している。このようにきちんと表現しようとすると「任意」「存在」は色々な所に顔を出す。

---

(1)「任意」という用語は「すべて」と同じ意味で使われる。「任意の x」といった場合，自分がかってに選べる x ではないことに注意すること。
(2)今の段階でここで書かれてある内容が理解できなくてもかまわない。ただ数学的な事実を表現するとき,「任意」と「存在」が顔を出すという点は確認しておいてほしい。

「x は 3 以上である。」という言明のように不定元を含んでいるものは真偽が定まらないので命題ではないが[3]，x に具体的なものが代入されて得られる言明は真偽が定まり，命題になる。このようなものを**命題関数** (*propositional function*) または**条件** (*condition*) といい，不定元が x である事を強調して $P(x)$ のように表す。

$P(x)$ が命題関数の時,「集合[4]M の任意の元 x に対し $P(x)$ が成立する。」という言明は命題になる。これを通常は

$$\text{任意の } x \in M^{(5)} \text{に対し } P(x)$$

と書く。また,「元 x が集合 M に存在して，命題 $P(x)$ が成立する。」[6]という言明も命題になる。これを通常は

$$(\text{ある})x \in M \text{ が存在して } P(x)$$

と書く。

たとえば 「$P(x)$: x は 3 以上」とするとき

$$\text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ に対し } P(x)$$

というのは命題である (今の場合正しくない命題)。

$$x \in \mathbb{R} \text{ が存在して } P(x)$$

も命題である (今の場合正しい命題)。

演習問題 1.7　次の命題の真偽を判定せよ。

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $x^2 \geqq 0$

(2) 任意の $x \in \mathbb{C}$ に対し $x^2 \geqq 0$

(3) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $x^4 - x^2 + \dfrac{1}{4} \geqq 0$

(4) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} \geqq 0$

(5) $x \in \mathbb{R}$ が存在して $x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} \leqq 0$

(6) $x \in \mathbb{R}$ が存在して $x - 2x^2 > 0$ かつ $x < 0$

「任意」「存在」を含んだ命題の否定命題を作るときは注意が必要である。

$$\text{任意の } x \in M \text{ に対し } P(x)$$

の否定は

$$\text{任意の } x \in M \text{ に対し } \neg P(x)$$

[3]前に「$x = 1 \Longrightarrow x^2 = 1$」が命題の様に書いたが，厳密にはこれは間違いであり，正確には「任意の実数 (状況により整数等の場合がある) に対し，$x = 1 \Longrightarrow x^2 = 1$」と言わなくてはならなかった。ただし「任意の x について $\cdots$ が成立する」ということが前後の脈絡から明らかな場合は省略するという用法もある。そのように解釈すれば間違いとは言えない。高校の教科書などは基本的にそのような立場で記述されている。

[4]集合は「集合と写像」の章で詳しく学ぶ。ここでは高校までの知識を前提にしておく。

[5]x が集合 M の元であるという記号，これについては「集合と写像」のところで学ぶ。

[6]「命題 $P(x)$ が成立するような元 x が集合 M に存在する」の方が自然な日本語といえるかもしれないが，数学では通常直訳的なこのような表現が使われる。

ではない。$P(x)$ が成立しない元が 1 つでもあればよいので

$$x \in M \text{ が存在し } \neg P(x)$$

である。同様に考えると

$$x \in M \text{ が存在して } P(x)$$

の否定は

$$\text{任意の } x \in M \text{ に対し } \neg P(x)$$

である。

「$P(x)$: x は 3 以上」とする。

$$\text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ に対し } P(x)$$

という命題が正しくないことを示すためには，その否定命題

$$x \in \mathbb{R} \text{ が存在して } \neg P(x)$$

が正しいことを示せばよい。たとえば 0 は $0 \in \mathbb{R}$ であり，$\neg P(0)$ は正しい命題なので否定命題は正しい。よって元の命題が正しくないことが示される。

「$P(x)$: $x^2 = -1$」とする。

$$x \in \mathbb{R} \text{ が存在して } P(x)$$

という命題が正しくないことを示すためには，その否定命題

$$\text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ に対し } \neg P(x)$$

が正しいことを示せばよい。任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $x^2 \geqq 0$ ということが知られているので，$x^2 \neq -1$ 即ち $\neg P(x)$ が成立する。否定命題は正しいので，元の命題が正しくないことが示される。

演習問題 1.8　演習問題 1.7 の命題の否定命題をつくれ。

少し数学的内容のある演習問題を考えよう。そのために線型代数で学ぶ概念を先取りして定義する。$\boldsymbol{x}$ を空間または平面のベクトルとする。すなわち x, y, z を実数とするとき，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ または $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表されているとする。平面のベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^2$，空間のベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^3$ と書く。

$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を平面のベクトルとする。ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ の組が次の条件をみたすとき，$\mathbb{R}^2$ **を生成する**という ;「任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対し $a_1 \in \mathbb{R}$ および $a_2 \in \mathbb{R}$ が存在して $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$」。$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ を空間のベクトルとする。ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ の組が次の条件をみたすとき，$\mathbb{R}^3$ **を生成する**という ;「任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対し $a_1 \in \mathbb{R}$ および $a_2 \in \mathbb{R}$，$a_3 \in \mathbb{R}$ が存在して $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3$」。

例を考える。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする。ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

と表されていると仮定する。このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表されるので

$$x = a_1 + a_2, \quad y = a_1 - a_2$$

となっている。これを a_1, a_2 について解くと

$$a_1 = \frac{x+y}{2}, \quad a_2 = \frac{x-y}{2}$$

となっている。逆に a_1, a_2 が x, y によって上の様に表されているとき，この上の式を逆にたどると

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

が成立している。以上が解析の過程である。以下が証明である。

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$a_1 = \frac{x+y}{2}, \quad a_2 = \frac{x-y}{2}$$

とおくと

$$x = a_1 + a_2, \quad y = a_1 - a_2$$

が成立するので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 \end{aligned}$$

と表される。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成する。

次の例として $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

と表されていると仮定する。このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されるので

$$x = a_1 - a_2, \quad y = -a_1 + a_2$$

となっている。このとき

$$x = a_1 - a_2 = -(-a_1 + a_2) = -y$$

となるので，$x = -y$ が成立する。よって

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

となる a_1, a_2 が存在するとき $x = -y$ が成立している。$x = -y$ を満たさない x, y については a_1, a_2 が存在しないと思われる。以上が解析の過程である。

証明の前に「生成する」の否定命題がどのようになっているかを調べる。命題関数 $P(\boldsymbol{x})$ を

$P(\boldsymbol{x}) : a_1 \in \mathbb{R}$ および $a_2 \in \mathbb{R}$ が存在して $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$

とすると「生成する」は

任意の$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$に対し $P(\boldsymbol{x})$

となるので，その否定は

ある$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$が存在して$\neg P(\boldsymbol{x})$

となる。$\neg P(\boldsymbol{x})$ は

任意の $a_1 \in \mathbb{R}$ および任意の $a_2 \in \mathbb{R}$ に対し $\boldsymbol{x} \neq a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$

なので「生成する」の否定は

ある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ が存在して，任意の $a_1 \in \mathbb{R}$ および任意の $a_2 \in \mathbb{R}$ に対し $\boldsymbol{x} \neq a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$

となる。以下が証明である。

ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする。このときこのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $P(\boldsymbol{x})$ が真であると仮定すると

$$\boldsymbol{x} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成立している。このとき

$$1 = a_1 - a_2, \quad 1 = -a_1 + a_2$$

が成立しているので

$$1 = a_1 - a_2 = -(-a_1 + a_2) = -1$$

が成立するがこれは矛盾である。よって $P(\boldsymbol{x})$ は偽なので $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成しない。

演習問題 1.9　次のベクトルの組が $\mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ を生成するかどうか調べよ。

(1) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(4) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$