数学序論要綱 #4 　　　　2006–5–11 　　河野

2.4 写像

A, B を集合とする。A, B を集合とする。A の各要素 a に対し B の要素 b を対応させる規則 f を，集合 A から集合 B への**写像** (*mapping,map*) といい，

$$f : A \longrightarrow B, \qquad \text{または} \qquad A \xrightarrow{f} B$$

のように表す。

要素 $a \in A$ に対応する要素 $b \in B$ を写像 f による a の**像** (*imarge*) といい，$b = f(a)$ と表す。逆に，a を f による b の**原像** (*preimarge*) という。

元 x に対し $f(x)$ が対応しているとき $x \longmapsto f(x)$ と書くことがある。これをひとまとめにして書くこともある。例えば 2 次関数 $y = f(x) = x^2$ は実数全体の集合 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像と考えることができる。実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し x^2 を対応させるので

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

と書くことができる。

定義 2.6

(1) 写像 $f : A \longrightarrow B$ において，A を**定義域** (*domain*) といい，B を**終域** (*codomain*) という。$f(A) = \{\, f(a) \mid a \in A \,\}$ を**値域** (*range*) あるいは**像** (*image*) という。

(2) 集合 A から A 自身への写像で，任意の要素 $a \in A$ を a に写す写像を**恒等写像** (*identity map*) といい，id_A または 1_A という記号で表す (すなわち $id_A(a) = a \quad \forall a \in A$ である)。

(3) 写像 $f : A \longrightarrow B$ において $f(A) = B$ のとき，f を A から B への**全射** (*surjection*) ，または**上への写像** (*onto map*) という。

(4) 写像 $f : A \longrightarrow B$ において $a_1 \neq a_2$ となる全ての $a_1, a_2 \in A$ に対して，常に $f(a_1) \neq f(a_2)$ となる時，f を**単射** (*injection*) ，または **1 対 1 の写像** (*one-to-one map*) という。

(5) 写像 $f : A \longrightarrow B$ が全射かつ単射である時，**全単射** (*bijection*) という。

(6) ２つの写像 $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ に対し，$h(a) = g(f(a))$ で定められる写像 $h : A \longrightarrow C$ を定義できる。これを f と g の**合成写像** (*composite mapping*) といい，$h = g \circ f$ という記号で表す。

A, B が実数や複素数の部分集合のとき写像 $f : A \longrightarrow B$ を**関数** (*function*) と呼ぶことが多い。$f : X \longrightarrow Y$ が関数のとき y が x の式で与えられる場合がよくある。例えば $y = x^2$ の関係があるとき $y = f(x) = x^2$ という関係がある。この $y = f(x) = x^2$ は像であって関数 (写像) ではないが，歴史的使用法により，関数 $y = f(x) = x^2$ という表現をすることがある。解析学においてはむしろこの表現の方が多いかもしれない。

定義域が明示的に述べられていないとき，考えられる最大の集合をとることも多い。例えば定義域の指定なしに関数 $y = \dfrac{1}{x}$ と言った場合，解析学では通常実数値関数の範囲で考えるので，$X = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \,\}$ と考える。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

例 2.7

(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ と定義するとき，通常 2 次関数と呼ばれる。この場合，定義域は $\mathbb{R}$ であり，終域も $\mathbb{R}$ である。$f(1) = f(-1) = 1$ が成立する。すなわち，異なる 2 つの点の行き先で同じになるものがあるので f は単射ではない。

値域 $f(\mathbb{R})$ は 0 以上の実数全体の集合 $f(\mathbb{R}) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0 \} = [\,0, \infty\,)$ である。よって f は全射ではない。

(2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\,0, \infty\,)$ を $f(x) = x^2$ で定義すると，この f は (1) の f と終域を除いて同じ値をとる写像だが，(2) の f は全射だが，(1) の f は全射ではない。

(3) $f(x) = x^2$ という同じ 2 次関数を考える。しかし今度は，定義域を制限して，f を $f : [\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ という写像と考える。値域 $f([\,0, \infty\,))$ はやはり $[\,0, \infty\,)$ となる。

この場合，f は $[\,0, \infty\,)$ 上では単調増加であり，$x_1 \neq x_2$ ならば必ず $f(x_1) = x_1^2 \neq x_2^2 = f(x_2)$ となるので単射である。しかし全射ではないことは明らかである。

(4) しつこく $f(x) = x^2$ という同じ 2 次関数を考える。しかし今度は，定義域と終域を共に制限して，f を $f : [\,0, \infty\,) \longrightarrow [\,0, \infty\,)$ という写像と考える。

(3) で述べた理由から f は単射であり，さらに，値域 $f([\,0, \infty\,))$ は $[\,0, \infty\,)$ であるので全射となり，全単射となる。

演習問題 2.9　以下の (1)〜(9) の写像について，

(a) 単射であるが全射ではない。
(b) 全射であるが単射ではない。
(c) 単射でも全射でもない。
(d) 全単射である。

のどれに相当するのかを判定せよ。

(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = e^x$ と決める。
(2) $f : (\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = e^x$ と決める。
(3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow (\,0, \infty\,)$ を $f(x) = e^x$ と決める。
(4) $f : (\,0, \infty\,) \longrightarrow (\,0, \infty\,)$ を $f(x) = e^x$ と決める。
(5) $f : (\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \log x$ と決める。
(6) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \cos x$ と決める。
(7) $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\,-1, 1\,]$ を $f(x) = \cos x$ と決める。
(8) $f : [\,0, \pi\,] \longrightarrow [\,-1, 1\,]$ を $f(x) = \cos x$ と決める。
(9) $f : [\,0, \pi\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \cos x$ と決める。

命題 2.8 $f : A \longrightarrow B$ が全単射であれば，B の任意の要素 b に対して，$f(a) = b$ となる A の要素 a がただ一つ存在する。

証明　$f : A \longrightarrow B$ は全射なので，$f(A) = B$ である。従って，B の任意の要素 b に対して，$b \in f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \}$ なので，ある $a \in A$ が存在して，$b = f(a)$ となっている。

f は単射なので，$f(a_1) = f(a_2) = b$ であるとすると $a_1 = a_2$ でなければならない。すなわち，$f(a) = b$ となるような a はただ一つである。 ∎

$f : A \longrightarrow B$ が全単射である時，$b \in B$ に対して，このような $a \in A$ を対応させる写像が定義できる。これを f の**逆写像** (*inverse map*) といい，$f^{-1} : B \longrightarrow A$ という記号で表す。すなわち，

$f(a)=b$ の時，$f^{-1}(b)=a$ である。従って特に，

$$f^{-1}\circ f = id_A \qquad f\circ f^{-1} = id_B$$

が成り立つ。

例 2.9
(1) $f:\mathbb{R}\longrightarrow (\,0,\,\infty\,)$ を $f(x)=e^x$ とすると f は全単射である。従って，f の逆写像 $f^{-1}:(\,0,\,\infty\,)\longrightarrow\mathbb{R}$ が存在する。これが $f^{-1}(x)=\log x$ である。
(2) $f:[\,0,\,\infty\,)\longrightarrow[\,0,\,\infty\,)$ を $f(x)=x^2$ とすると全単射となる。従って，この逆写像 $f^{-1}:[\,0,\,\infty\,)\longrightarrow[\,0,\,\infty\,)$ が存在する。これが $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ である。
(3) $f:\left[\,-\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{\pi}{2}\,\right]\longrightarrow[\,-1,\,1\,]$ を $f(x)=\sin x$ とすると全単射である。従って，逆写像 $f^{-1}:[\,-1,\,1\,]\longrightarrow\left[\,-\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{\pi}{2}\,\right]$ が存在する。この関数を $f^{-1}(x)=\arcsin x$ と書き，アークサイン x と読む。$\sin^{-1}x$ と書かれることが多いが，間違えやすい記号なので，この講義では採用しない。

命題 2.10 $f:A\longrightarrow B,\ g:B\longrightarrow A$ であり，$g\circ f=id_A$ であったとする。
(1) f は単射である。
(2) g は全射である。

証明 (1) の証明：$a_1,a_2\in A$ を $a_1\neq a_2$ となるものとする。$g\circ f=id_A$ であるので，

$$g(f(a_1))=a_1\neq a_2=g(f(a_2))$$

である。$f(a_1)=f(a_2)$ ならば，当然 $g(f(a_1))=g(f(a_2))$ とならなければならないが，$g(f(a_1))\neq g(f(a_2))$ であるので，$f(a_1)\neq f(a_2)$ であり，従って f は単射である。

(2) の証明： $g\circ f=id_A$ であるので，$g(f(A))=A$ である。$f(A)\subseteq B$ であるから，$g(B)\supseteq A$ である。しかし，$g(B)\subseteq A$ であるから，$g(B)=A$ が成り立つ。 ∎

演習問題 2.10 $f:A\longrightarrow B,\ g:B\longrightarrow C$ とする。
(1) f と g が単射ならば，$g\circ f:A\to C$ も単射であることを証明せよ。
(2) f と g が全射ならば，$g\circ f:A\to C$ も全射であることを証明せよ。
ヒント：単射と全射の定義が満たされることを示せば良い。

演習問題 2.11 X,Y を集合とし，$f:X\longrightarrow Y$ とする。$A,\,B$ を X の部分集合とする。
(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$ を証明せよ。
(2) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$ を証明せよ。
(3) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ とはならない例を挙げよ。
ヒント： (1), (2) については，問題 2.5 のヒントを参照。(3) については，そういう例を作れば良い。