3　図形と方程式

3.1　点と座標

数直線　最初に数直線について復習しておく。直線 L を考える (通常は横に書く)。L 上に 1 点を固定し O と名づける。O 以外にもう 1 点固定し (通常は O の右側にとる)，E とする。実数 x に対し L 上の点 P を次のように対応させる。$x = 0$ のときは O を対応させる。$x > 0$ のときは O の右側にあって $\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OE}} = x$ となる点 P を対応させる。ここで $\overline{OP}$ は線分 OP の長さを表す。$x < 0$ のときは O の左側にあって $\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OE}} = |x|$ となる点 P を対応させる。ただし $|x|$ は x の絶対値とする。「写像」をつかって述べると，

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow L$$

を実数 x に対し上の様にして点 P を対応させる写像とする。このように定義すると写像 f は全単射であることが知られている[(1)]。実数 x に L 上の点 P が対応するとき点 P の**座標**は x であるという。高校のときはこのことを $P(x)$ と書いた。この書き方は x を変数とする点関数という誤解を生じさせるおそれもあるので，今後はあまり用いないようにしよう (といいながら図 3.1 で使用しているが…)。また点と座標である実数を同一視して，直線上の点を実数と呼ぶこともある。実数と同一視された直線を**数直線**と呼ぶ。今後は断りなしにこのような同一視を行うものとする。図 3.1 の例でいうと点 π や点 $-\sqrt{2}$ と呼ぶ。

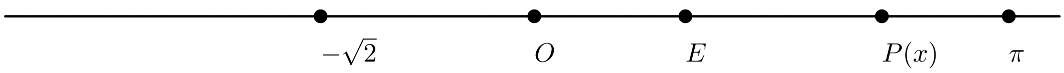

図 3.1

座標平面　平面に直交する 2 本の直線をとる。通常は横に走る直線を L，縦に走る直線を L' とする。交点を O とする。L 上に O 以外の点 E(普通は O の右側にとる) を 1 つ固定する。L' 上に $\overline{OF} = \overline{OE}$ となる点を (普通は O の上側に)1 つ固定する。L，L' を数直線と考え，x–軸，y–軸と呼ぶ。平面上の点 P を任意にとってくる。点 P から L' に平行な直線を引く。その直線と x–軸 (L) の交わる点が唯 1 つ存在する。L は数直線と考えているので，点と座標とを同一視して，これを x とする。点 P から L に平行な直線を引く。その直線と y–軸 (L') の交わる点が唯 1 つ存在する。L' は数直線と考えているので，点と座標とを同一視して，これを y とする。このとき (x, y) を点 P の**座標**とを呼ぶ。この対応で平面の点全体のつくる集合と実数の順序対のつくる集合 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は一対一に対応する。点 P の座標が (x, y) であるとき，P の x 座標は x，y 座標は y という。ま

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(1) あっさりと「知られている」と書いたが，このことをきちんと考えるためには実数，直線などをきちんと定義して議論する必要があり，そんなに簡単なことではない。ここではこのことを認めて先に進むことにする。

た点と順序対を同一視して，平面上の点 (x,y) と呼ぶこともある。$\mathbb{R}^2$ と同一視された平面を**座標平面**と呼ぶ。

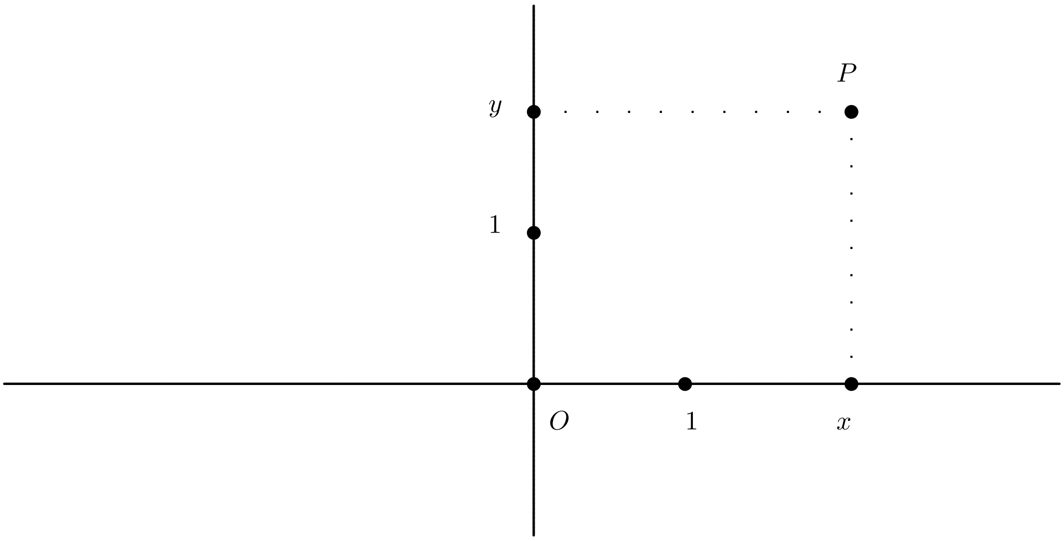

図 3.2

座標平面の考え方は式と図形を結びつけ，図形を代数的に考えるたり，式を幾何的に考えたりする方法を生み出した。近代数学の数学全体に対する最も大きな貢献と言っても過言でないかもしれない。たとえば $y=x-1$ という式を考える。これに対し

$$A=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y=x-1\,\right\}$$

という集合 (図形) を考える。これは直線であり，式 $y=x-1$ は直線を表していると考えることができる。

逆に点 $(0,-1)$ を通る傾き 1 の直線 A があったとする。図形 A は集合として

$$A=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y=x-1\,\right\}$$

と表されるので，式 $y=x-1$ を調べることで直線の性質を調べることができる。

一般に x,y に関する式 $f(x,y)$ に対し

$$A=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x,y)=0\,\right\}$$

は平面内の図形になる。

$$\begin{array}{ccc} (\text{式}) & \Longleftrightarrow & (\text{図形}) \\ f(x,y) & \Longleftrightarrow & A \end{array}$$

式の性質 (代数) と図形の性質 (幾何) がお互いを補いながらその特徴を調べていくのが，古代ギリシアにはなかった方法である。この方法の画期性はおいおい分かってくるであろう。ここで図形と方程式について復習しておく。

方程式とは？　方程式というのは

問題 1 鶴と亀あわせて３匹 (鶴は「匹」ではなくて「羽」だろう，というツッコミは無し)，足の数が合わせて１０本の時，鶴と亀はそれぞれ何匹ずつか？

という問題を解くときの所謂「２元連立１次方程式」

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+4y=10 \end{cases} \tag{1}$$

や

問題 2 ある時刻に札幌を出て北見に向かったバスとその３時間後に北見を出て札幌に向かった乗用車とが午後１時にすれ違い，バスは北見に，乗用車は札幌にともに午後３時に到着したとする。バスと乗用車は同じ道をそれぞれ一定の速さで進んだとするとバスの出発時刻は何時か？

という問題を解くときの所謂「2 次方程式」

$$x^2+x-6=0 \quad (3-1:1-x=1-x-3:3-1 \text{ を整理したもの}$$

のように，**いくつかの未知数** (問題 1 では x と y，問題 2 では x) **が満たすべき条件を記述した，いくつかの等式の集まり**のことである。

方程式を図形的に捉える　元の問題 1 を離れて連立１次方程式 (1) を幾何学的に見れば，xy 平面上の直線 $x+y=3$ と直線 $2x+4y=10$ の交点を考えていることになる。(直線 $x+y=3$ 上では x や y は任意の実数を取り得るが，鶴が $\sqrt{2}$ 羽などという馬鹿なことはないので，元の意味に拘泥しているとこういう見方は出来ない。) 方程式を幾何的に見ることによって，解がどのくらいあるかとかどうやったら解けるかという問題に対しても見通しがよくなるのである。

$x^2+x-5=0$ の解は幾何学的には数直線上の２点なのでややさびしいが，$\begin{cases} y=x^2+x-5 \\ y=0 \end{cases}$ の解と考えれば放物線と x 軸の交点の話になって幾何的に見ることが出来る。

図形を方程式で考える　逆に，純粋に幾何学的な問題に対して，座標を導入し図形を方程式や不等式で記述することによって，代数的な言葉に翻訳し，問題を計算によって解決出来る場合がある。これからそのような例を沢山見ることになる。

距離：点 A の座標を a，点 B の座標を b とすると点 A と点 B の**距離** d は

$$d=|a-b|$$

で与えられる。後で考える平面の場合と同じ形にするなら

$$d=\sqrt{(a-b)^2}$$

とも書ける。

点 (x_0,y_0) と点 (x_1,y_1) を結ぶ線分は，図 3.3 の斜辺であるから，ピタゴラスの定理 (三平方の定理) によって

$$\bigl(\text{点 } (x_0,y_0) \text{ と点 } (x_1,y_1) \text{ の距離}\bigr)^2=(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2$$

なので，

$$\bigl(\text{点 } (x_0, y_0) \text{ と点 } (x_1, y_1) \text{ の距離}\bigr) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

である。

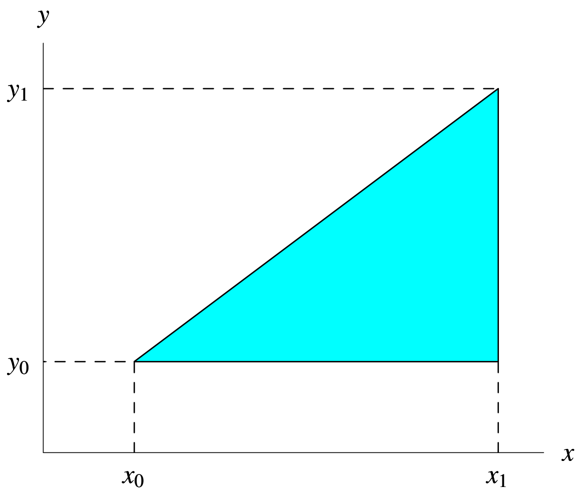

図 3.3　2 点間の距離

例 3.1　点 $(1, 3)$ と点 $(4, -1)$ の間の距離は

$$\sqrt{(1-4)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

となる。

実は 3 次元空間で考えても同様で

$$\bigl(\text{点 } (x_0, y_0, z_0) \text{ と点 } (x_1, y_1, z_1) \text{ の距離}\bigr) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2} \qquad (2)$$

が成立する。

演習問題 3.1　上の公式 (2) が何故成り立つか考えよ。(ヒント：例えば，点 (x_1, y_1, z_1) から xy 平面に垂線を下ろしてみよ。)

例 3.2　(2006 年度第 1 回数理解析 0 試験) 点 $(1, 2, 3)$ と点 $(4, -1, -1)$ の間の距離を求めよ。

解答例

$$\sqrt{(1-4)^2 + (2-(-1))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{3^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{34}$$

演習問題 3.2　次の 2 点間の距離を求めよ。

(1) 点 $(1, 3)$ と点 $(5, 6)$	(2) 点 $(1, 2)$ と点 $(4, -3)$	(3) 点 $(1, 3)$ と点 $(3, -4)$
(4) 点 $(-2, -3)$ と点 $(3, -6)$	(5) 点 $(-2, 3)$ と点 $(4, 3)$	(6) 点 $(3, -3)$ と点 $(-5, 3)$
(7) 点 $(-2, -4)$ と点 $(2, 1)$	(8) 点 $(0, 0)$ と点 $(-3, 9)$	(9) 点 $(1, -3)$ と点 $(1, 2)$

演習問題 3.3

(1) 3点 $(7,2),(3,0),(0,6)$ を頂点とする三角形はどんな三角形か？

(2) 3点 $(0,-1),(2,-3),(4,3)$ を頂点とする三角形はどんな三角形か？

(3) 3点 $(4,8),(-1,3),(3,1)$ を頂点とする三角形は二等辺三角形であることを示せ。

(4) 直線 $y=x$ 上の点で、点 $(1,3)$ と点 $(3,0)$ から等距離にある点の座標を求めよ。

内分点の座標： 線分 AB を $m:n$ に内分する点 C は点 A から点 B の方向へ線分 AB の長さの $\dfrac{m}{m+n}$ 倍だけ移動した点であるから，点 C の座標は

$$a+\frac{m}{m+n}(b-a)=\frac{na+mb}{m+n}$$

となる。

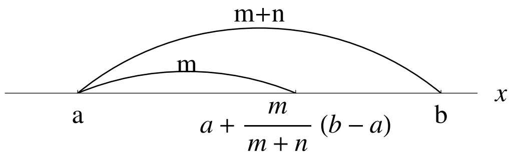

図 3.4 数直線上の線分の内分

例 3.3 点 A の座標を -1 とし点 B の座標を 4 とするとき，線分 AB を $3:2$ に内分する点の座標は

$$\frac{2\cdot(-1)+3\cdot 4}{3+2}=2$$

である。

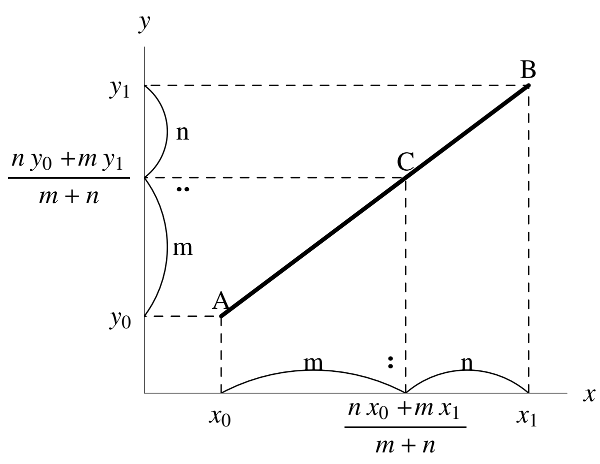

図 3.5 平面上の線分の内分点

xy 平面上の線分の場合　平面上の xy 平面上の点 A の座標を (x_0, y_0)，点 B の座標を (x_1, y_1) とする。線分 AB を $m : n$ に内分する点 C の x 座標は x 軸上の x_0 と x_1 を結ぶ線分を $m : n$ に内分する点の x 座標だから上の結果から $\dfrac{nx_0 + mx_1}{m+n}$ である。y 座標についても同様だから,

$$\begin{pmatrix}\text{点 } (x_0, y_0) \text{ と点 } (x_1, y_1) \text{ を結ぶ線} \\ \text{分を } m : n \text{ に内分する点の座標}\end{pmatrix} = \left(\frac{nx_0 + mx_1}{m+n}, \frac{ny_0 + my_1}{m+n}\right)$$

となる。

例 3.4 (2006 年度第 1 回数理解析 0 試験) 点 A の座標を $(2, 3)$ とし，点 B の座標を $(-3, 1)$ とするとき，線分 AB を $3 : 2$ に内分する点の座標を求めよ。

解答例

$$\left(\frac{2 \cdot 2 + 3(-3)}{3+2}, \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{3+2}\right) = \left(-1, \frac{9}{5}\right)$$

演習問題 3.4

(1) 点 A の座標を $(2, -1)$、点 B の座標を $(4, -2)$ とするとき、線分 AB の中点の座標を求めよ。

(2) 点 A の座標を $(-1, -2)$、点 B の座標を $(8, 4)$ とするとき、線分 AB を $2 : 1$ に内分する点の座標を求めよ。

(3) 点 A の座標を $(1, 2)$、点 B の座標を $(4, 6)$ とするとき、線分 AB を $2 : 5$ に内分する点の座標を求めよ。

(4) 点 A の座標を $(2, -1)$、点 B の座標を $(4, -2)$ とするとき、線分 AB を $3 : 2$ に内分する点の座標を求めよ。

(5) 点 A の座標を $(1, 2)$、点 B の座標を $(4, 6)$ とするとき、線分 AB を $5 : 2$ に内分する点の座標を求めよ。

ベクトルを用いると　線分 AB を $m : n$ に内分する点を C とすれば C は A から B に向かって AB の長さの $\dfrac{m}{m+n}$ だけ行ったところだから

$$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$

従って原点を O とすれば C の位置ベクトル $\overrightarrow{OC}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \\ &= \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

となる。点 A の座標を (x_0, y_0)，点 B の座標を (x_1, y_1)，点 C の座標を (x, y) とすれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{n}{m+n}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{m}{m+n}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

となる。

外分点の座標　$m > n$ のとき，線分 AB を $m:n$ に外分する点 C とは図 3.6 のような点だから，点 A から点 B に向かって AB の長さの $\dfrac{m}{m-n}$ 倍だけ行った場所にある。従って点 C の座標は

$$a + \frac{m}{m-n}(b-a) = \frac{(-n)a + mb}{m + (-n)} \left(= \frac{na + (-m)b}{(-m) + n} \right)$$

である。$m < n$ は点 C が左側に来るが同様である。

演習問題 3.5　$m < n$ の場合に，図 3.6 と同様な図を自分で描いて考えてみよ。

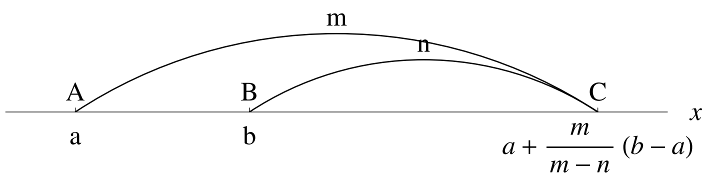

図 3.6　直線上の線分の外分点

外分点の公式の解釈

$$(m:n \text{ に外分}) = (m:(-n) \text{ に「内分」}) = ((-m):n \text{ に「内分」})$$

と考えれば外分の場合の公式を内分の場合と別に憶えなくてすむ[(2)]。

xy 平面上の線分の場合　平面上の線分を $m:n$ に外分する点の座標は内分点の場合同様，x 座標と y 座標のそれぞれについて $m:n$ に外分して得られるから

$$\begin{pmatrix} \text{点 } (x_0, y_0) \text{ と点 } (x_1, y_1) \text{ を結ぶ線} \\ \text{分を } m:n \text{ に外分する点の座標} \end{pmatrix} = \left(\frac{(-n)x_0 + mx_1}{m-n}, \frac{(-n)y_0 + my_1}{m-n} \right)$$

となる。

$$(m:n \text{ に外分}) = (m:(-n) \text{ に「内分」}) = ((-m):n \text{ に「内分」})$$

と考えれば外分の場合の公式を内分の場合と別に憶えなくてすむことは数直線上の線分の外分のときと同じである。

例 3.5 点 A の座標を $(2,3)$，点 B の座標を $(-1,1)$ とするとき，線分 AB を $3:1$ に外分する点の座標を求めよ。解答例

$$\left(\frac{(-1)2 + 3(-1)}{3 + (-1)}, \frac{(-1)3 + 3 \cdot 1}{3 + (-1)} \right) = \left(-\frac{5}{2}, 0 \right)$$

---

(2) そもそも内分点の公式についても，自然と頭に入ってしまうのは仕方がないが丸暗記して記憶に頼るのはよくない。(どうよくないかというとそういう勉強の仕方をしているといくら勉強しても数学の理解が深まっていかないし，間違える可能性も高いからである。) 最初のうちはその都度上のように考えて公式を導くのがよい。慣れてきたら大体の形は自然と頭に入ってしまうだろうから，おぼろげな記憶が正しいかどうか簡単なチェックだけする。内分点の公式の場合で言えば $m:n = 1:0$，$1:1$，$0:1$ などを入れて期待する結果になるかどうかをチェックすればよい。

演習問題 3.6

(1) 点 A の座標を $(-1,-2)$、点 B の座標を $(8,4)$ とするとき、線分 AB を $2:1$ に外分する点の座標を求めよ。

(2) 点 A の座標を $(2,-1)$、点 B の座標を $(4,-2)$ とするとき、線分 AB を $2:3$ に外分する点の座標を求めよ。

(3) 点 A の座標を $(1,2)$、点 B の座標を $(4,6)$ とするとき、線分 AB を $2:5$ に外分する点の座標を求めよ。

(4) 点 A の座標を $(2,-1)$、点 B の座標を $(4,-2)$ とするとき、線分 AB を $3:2$ に外分する点の座標を求めよ。

(5) 点 A の座標を $(1,2)$、点 B の座標を $(4,6)$ とするとき、線分 AB を $5:2$ に外分する点の座標を求めよ。

演習問題 3.7

(1) 点 $(1,2)$ と点 (a,b) の中点の座標が $(2,-1)$ であるとき a,b の値を求めよ。

(2) 点 $(2,3)$ に関して点 $(-4,6)$ と対称な点の座標を求めよ。

(3) 点 $(2,3)$ に関して点 $(5,8)$ と対称な点の座標を求めよ。

(4) 点 $(1,3)$ に関して点 $(-2,5)$ と対称な点の座標を求めよ。