

3.2 直線の方程式

直線 L に対し方程式 $f(x, y) = 0$ が

$$L = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0 \}$$

を満たすとき方程式 $f(x, y) = 0$ を直線の方程式という。

例えば方程式 $f(x, y) = y - (2x + 1) = 0$ に対し

$$L = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - (2x + 1) = 0 \}$$

は直線になるので $y - (2x + 1) = 0$ は直線 L を表す方程式である。この方程式を通常は移行して $y = 2x + 1$ と書く。

一般に 1 次関数 f を

$$f(x) = ax + b$$

とすると、関数 f のグラフ

$$G_f = (\text{関数 } f \text{ のグラフ}) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \}$$

は直線になる⁽¹⁾。

それでは逆に xy 平面上の直線はすべて 1 次関数のグラフか? というこれは正しくない。(「逆必ずしも真ならず」。) y 軸に平行な直線は $x = (\text{定数})$ の形で書かれ, $y = ax + b$ の形には書けないからである。これを含めるとすべての直線を表すことができる。即ち次が成立する。

$$\begin{aligned} \text{直線 } L \iff a, b \in \mathbb{R} \text{ が存在して } L = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b \} \\ \text{または } c \in \mathbb{R} \text{ が存在して } L = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = c \} \end{aligned}$$

後で 1 次関数に関してもう少し考えるが, その前にもう 1 つの表し方を復習しておこう。2 元 1 次方程式とは, $y - (2x + 1) = 0$ の様に

$$(x, y \text{ の } 1 \text{ 次式}) = 0$$

の形の方程式のことであった。一般形は例えば

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \tag{1}$$

と書ける。ただし α, β, γ は定数である。

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

⁽¹⁾簡単に「直線になる」と書いたが, 一般に 1 次関数 $f(x) = ax + b$ のグラフが xy 平面上の直線であることは, 当たり前のように思うかも知れないが, 中学高校と時間をかけてゆっくり納得してきたことである。何故直線なのかという問いへの答え方はいろいろあるが, 「証明」がしたければまず「直線」とは何かという定義をはっきりさせなければならず, それほど簡単な問題ではない。

$\alpha = 0$ かつ $\beta = 0$ のとき方程式は

$$\gamma = 0$$

となる (この式は等式ではなく方程式であることに注意!)。 $\gamma \neq 0$ (今度は方程式ではない) のとき $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma = 0\}$ は空集合であり, $\gamma = 0$ (今度も方程式ではない) のとき $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma = 0\}$ は全平面になる。この場合は除外する。即ち 2 元 1 次方程式といったとき $\alpha \neq 0$ または $\beta \neq 0$ を仮定することにする。

このとき

$$\text{直線 } L \iff \text{ある 2 元 1 次方程式が存在して } L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$$

が成立する。この様に 2 元 1 次方程式はすべての直線を表すことができる。しかし弱点もある。直線を与えたとき, 直線を表す 2 元 1 次方程式は 1 通りに決まるわけではない。例えば

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x - 1 = 0\}$$

と

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y - 4x - 2 = 0\}$$

は同じ直線を表す。1 次関数等を用いた表示では直線 L に対し a, b, c などの係数は一通り⁽²⁾に決まるが, 2 元 1 次方程式の場合は α, β, γ はそうではないことに注意する必要がある。

2 元 1 次方程式

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

が与えられているとき, 1 次関数を用いた表示に直すことは勿論できる。移行して $\beta y = -\alpha x - \gamma$ としておく。 $\beta \neq 0$ の場合は β で両辺を割ると

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}$$

と 1 次関数の形で表すことができる。 $\beta = 0$ のときは $\alpha \neq 0$ なので

$$x = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

と書ける。

直線 $y = ax + b$ ⁽³⁾ の a を傾き (gradient) と呼んだ。日常生活の語感では「傾き」というより「勾配」といった方がむしろわかりやすいかも知れない。坂の勾配である。坂の勾配は角度で表すのが普通だが, ここでは, 例えば水平方向に 100m 進むと何メートル上がるか, すなわち

$$a = (\text{傾き}) = \frac{(\text{垂直方向の変位})}{(\text{水平方向の変位})}$$

であり, 勾配の角度 (即ち x 軸とのなす角) を θ とすれば

$$a = \tan \theta$$

である。

⁽²⁾ 数学ではこのとき「一意の」という用語がよく用いられる。

⁽³⁾ 正確には $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$ が直線だが, 図形と対応する方程式を同一視してこのような表記もする。

直線 $y = ax + b$ と y 軸 (式で書くと $x = 0$) の交点の y 座標は $y = ax + b$ に $x = 0$ を代入して $y = b$ である。これを切片と言う⁽⁴⁾、と高校の教科書に書いてあるが、忘れているの人も多いので「 y 軸との交点の y 座標」と言っておいた方が無難かもしれない。

$$b = (y \text{ 軸との交点の } y \text{ 座標})$$

以上から、 y 軸と平行でない直線は傾きと「切片」を与えるとちょうど 1 つ決まることが分かる。傾きと 1 点を与えるとそれを通る直線がちょうど 1 つ決まる。これは 1 点と傾きを与えると「切片」が決定されることから分かる。

例 3.6 (2006 年度第 1 回数理解析 0 試験) 点 $(-2, -1)$ を通り、傾きが -2 の直線の方程式を求めよ。

解答例(その 1) 求める直線の式を $y = -2x + b$ と置く。点 $(-2, -1)$ を通ることから $-1 = -2(-2) + b$ 即ち $b = -5$ 答: $y = -2x - 5$

解答例(その 2)

$$y = -2(x - (-2)) - 1 \Leftrightarrow y = -2x - 5$$

演習問題 3.8 次の与えられた点を通り与えられた傾きをもつ直線の方程式を求めよ。

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| (1) 点 $(-3, 4)$, 傾き -2 | (2) 点 $(-1, 3)$, 傾き 2 | (3) 点 $(2, -1)$, 傾き $\frac{1}{3}$ |
| (4) 点 $(2, -1)$, 傾き -2 | (5) 点 $(2, -1)$, 傾き 0 | (6) 点 $(2, 1)$, 傾き 3 |
| (7) 点 $(-3, -4)$, 傾き -2 | | |

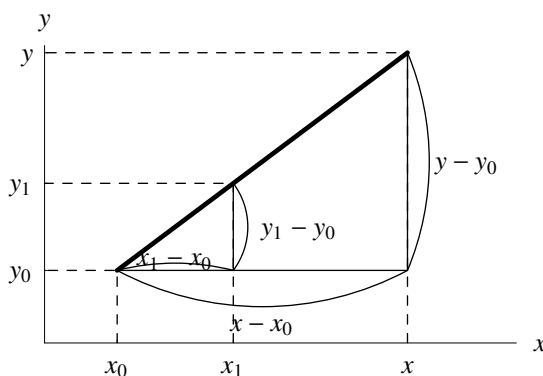


図 3.7 2 点を通る直線の式

点 (x_0, y_0) と点 (x_1, y_1) を通る 1 次関数のグラフは $x_0 \neq x_1$ のとき、ちょうど 1 個あり

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

である⁽⁵⁾。この式は $x \neq x_0$ のときは

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

⁽⁴⁾私は y 切片と習った。同様に x 軸との交点の x 座標を x 切片と習った。

⁽⁵⁾勿論こんな式を憶える必要は全くないし、丸暗記してはならない。

と同等であるが，この形だと

$$((x_0, y_0) \text{ と } (x, y) \text{ を結ぶ線分の傾き}) = ((x_0, y_0) \text{ と } (x_1, y_1) \text{ を結ぶ線分の傾き})$$

という解釈が出来る。

例 3.7 点 $(-1, 1)$ と点 $(1, 2)$ を通る直線の方程式を求めよ。

解答例

$$\begin{aligned} \text{直線 } y = ax + b \text{ が点 } (-1, 1) \text{ と点 } (1, 2) \text{ を通る} &\iff \begin{cases} 1 = a(-1) + b = -a + b \\ 2 = a \cdot 1 + b = a + b \end{cases} \\ &\iff (a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

よって答は $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

演習問題 3.9 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| (1) 2 点 $(-1, 1), (2, 7)$ | (2) 2 点 $(1, 4), (1, -1)$ | (3) 2 点 $(1, 1), (3, 5)$ |
| (4) 2 点 $(-2, 5), (2, 3)$ | (5) 2 点 $(3, 4), (-6, 4)$ | (6) 2 点 $(-3, 2), (-3, 5)$ |
| (7) 2 点 $(-3, 0), (2, 3)$ | (8) 2 点 $(2, 1), (-1, 7)$ | (9) 2 点 $(-1, 3), (-1, 5)$ |

演習問題 3.10 次の問いに答えよ。

- (1) 3 点 $(3, -4), (-2, -3), (p + 3, p)$ が一直線上にあるように p を定めよ。
- (2) 直線 $2x + 3y - 1 = 0$ の傾きと y 切片 (y 軸との交点の y 座標) を求めよ。

傾きと 2 直線の平行 2 つの直線が平行のとき (勿論 1 次関数で表される様な直線に限定してだが)

$$2 \text{ 直線が平行} \iff \text{傾きが同じ}$$

である。(ただし，ここでの「平行」には 2 直線が一致する場合も含む。)

例 3.8 (2006 年度第 1 回数理解析 0 試験)

次の直線のうちで，直線 $6x - 4y + 1 = 0$ に平行であるものはどれか？

- (a) $2x + 3y - 1 = 0$
- (b) $-3x + 2y + 4 = 0$
- (c) $4x - 6y - 3 = 0$
- (d) $6x + 4y + 3 = 0$

解答例 $6x - 4y + 1 = 0 \iff y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ であり，(a) は $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ ，(b) は $y = \frac{3}{2}x - 2$ ，
(c) は $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$ ，(d) は $y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$ であるから， $6x - 4y + 1 = 0$ に平行なのは (b)。

演習問題 3.11 次の点を通り次の直線に平行な直線の方程式を求めよ。

- | | |
|---------------------------------------|----------------------------------|
| (1) 点 $(1, 2)$ ，直線 $y = -2x + 7$ | (2) 点 $(3, -2)$ ，直線 $y = 2x + 1$ |
| (3) 点 $(3, -2)$ ，直線 $3x + y - 2 = 0$ | (4) 点 $(2, 1)$ ，直線 $2x + 3y = 4$ |
| (5) 点 $(-3, 2)$ ，直線 $4x - 3y + 2 = 0$ | |

傾きと2直線の垂直 直行する2直線の傾きの間には次の関係式が成立する。

$$y = ax + b \text{ と } y = cx + d \text{ が垂直} \iff ac = -1 \iff a = -\frac{1}{c} \quad (2)$$

である。

演習問題 3.12 何故上の (2) が成立するか、次の図 3.8 を見て考えてみよ。

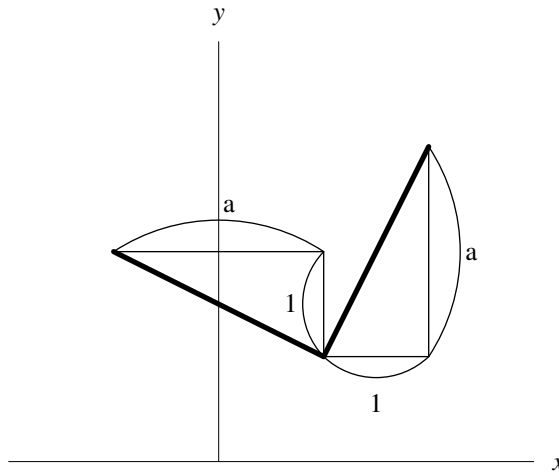


図 3.8 直交する直線の傾き

例 3.9 次の直線のうちで、直線 $6x - 4y + 1 = 0$ に垂直であるものはどれか？

(a) $2x + 3y - 1 = 0$

(b) $-3x + 2y + 4 = 0$

(c) $4x - 6y - 3 = 0$

(d) $6x + 4y + 3 = 0$

解答例 $6x - 4y + 1 = 0 \iff y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ であり、(a) は $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ 、(b) は $y = \frac{3}{2}x - 2$ 、

(c) は $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$ 、(d) は $y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$ であるから、 $6x - 4y + 1 = 0$ に垂直なのは (a)。

演習問題 3.13 次の点を通り次の直線に垂直な直線の方程式を求めよ。

(1) 点 (2, 3), 直線 $y = \frac{1}{2}x + 1$

(2) 点 (1, 2), 直線 $y = -2x$

(3) 点 (1, 2), 直線 $2x + 3y - 2 = 0$

(4) 点 (2, 1), 直線 $2x + 3y = 4$

(5) 点 (-3, 2), 直線 $4x - 3y + 2 = 0$

媒介変数表示 時刻 $t = 0$ に点 (x_0, y_0) にある物体が x 方向に v_1 、 y 方向に v_2 なる一定の速度で運動したとするとその t 秒後の位置 (x, y) は

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \quad (3)$$

で記述される。 $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$ の時には, この運動の軌跡が xy 平面上の直線を描くことは直観的に分かるであろう。所謂等速直線運動である。

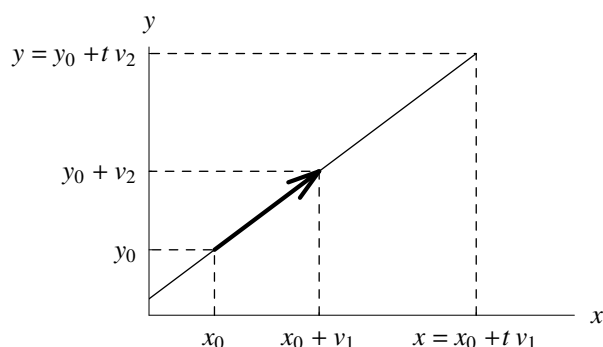


図 3.9 等速直線運動

運動の軌跡は時間変数 t を $-\infty$ から ∞ まで動かしたときの点 (x, y) の全体の集合

$$\{(x, y) \mid x = x_0 + v_1 t, y = y_0 + v_2 t (t \in \mathbb{R})^{(6)}\} \quad (4)$$

である。

物理的な意味を離れて数学的に見ると, (4) はこの直線を座標の変数 x, y の他に第 3 の変数 t を導入して表現したものであり, この意味で (3) をこの直線の媒介変数表示あるいはパラメタ表示と呼ぶ。(この場合の t のことを媒介変数あるいはパラメタと呼ぶ。)

ベクトル表示 縦ベクトルで書けば, 媒介変数表示 (3) は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

と書ける。ベクトル $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ にベクトル $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ の t 倍を足したベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を位置ベクトルに持つ点 (x, y) が, t を実数全体にわたって動かすとき点 (x_0, y_0) を通り $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ に平行な直線を描くことは上記「等速直線運動」の直観とも一致している。即ち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

は点 (x_0, y_0) を通り $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ に平行な直線を表すことが分かる。

⁽⁶⁾正確には $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = x_0 + v_1 t \text{ かつ } y = y_0 + v_2 t) \text{ を満たす実数 } t \text{ が存在する}\}$ と書くか, あるいは $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R} (x = x_0 + v_1 t) \wedge (y = y_0 + v_2 t)\}$ と書くべきだが上の程度にサボって書くのが普通である。

例 3.10 直線 $2x + 3y - 6 = 0$ の媒介変数表示をひとつ求めよ。

解答例

$$\text{媒介変数表示を } \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \text{ とすれば}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2(x_0 + v_1 t) + 3(y_0 + v_2 t) - 6 \\ &= (2x_0 + 3y_0 - 6) + (2v_1 + 3v_2)t \end{aligned}$$

がすべての t に対し成り立つこと、即ち $2x_0 + 3y_0 - 6 = 2v_1 + 3v_2 = 0$ が条件である。例えば $x_0 = 3, y_0 = 0, v_1 = 3, v_2 = -2$ とすればよい。

$$\text{答: } \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2t \end{cases}$$

xy 平面上の直線の表し方は 3 通りある：

- 1 次関数のグラフ： $y = ax + b$, ただし y 軸に平行な場合は $x = \text{定数}$
- 媒介変数表示： $\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases}$ ただし $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$
- 1 次方程式： $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ただし $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

それぞれに一長一短があり、互いに行き来できるので、都合により使い分けるとよい。

演習問題 3.14 次の問に答えよ。

- (1) 直線 $y = x + 1$ に関して点 $(3, 0)$ と対称な点の座標を求めよ。
- (2) 直線 $y = 2x - 3$ に関して点 $(4, 1)$ と対称な点の座標を求めよ。
- (3) 3 点 $(0, 3), (-2, 0), (3, 0)$ を頂点とする三角形の各頂点からそれぞれの対辺におろした 3 つの垂線が 1 点で交わることを証明せよ。
- (4) 3 点 $(-2, 2), (2, -1), (2, 4)$ を頂点とする三角形の 3 つの辺の垂直二等分線が 1 点で交わることを証明せよ。