数学序論要綱 #7

2006–5–30　　　河野

3.3　円の方程式

円の方程式にはいる前に図形を平行移動したとき，それを表す方程式がどう変わるかを一般的に考える。

図形の平行移動　一般に $F(x,y)=0$ という方程式で表される図形 C に対して，これを例えば x 方向に a，y 方向に b 平行移動した図形 C' の方程式はどうなるだろうか。動点 (x,y) が C' 上にあるための必要十分条件を x,y の関係式で表したものが C' の方程式であるから，

$$\begin{aligned} & \text{点 } (x,y) \text{ が } C' \text{ 上にある} \\ \Longleftrightarrow\quad & (\text{点 } (x,y) \text{ を } x \text{ 方向に } -a,\ y \text{ 方向に } -b \text{ だけ移動した}) \ (x-a,y-b) \text{ が } C \text{ 上にある} \\ \Longleftrightarrow\quad & F(x-a,y-b)=0 \end{aligned}$$

であることから，$F(x-a,y-b)=0$ が C' の方程式である。即ち

$$F(x,y)=0 \text{ を } \begin{pmatrix} x \text{ 方向に } a \\ y \text{ 方向に } b \end{pmatrix} \text{ 平行移動した図形の方程式は } F(x-a,y-b)=0$$

が分かる。ここでは便宜上，左辺に全部移項して右辺を 0 にした形で述べたが，右辺が 0 でない場合も含めて，要は x,y を $x-a, y-b$ に置き換えれば宜しい。

直線の平行移動　y 軸に平行でない直線を 1 次関数のグラフで表す式 $y=ax+b$ は，y 軸と $(0,b)$ で交わり傾きが a の直線を表すが，これは原点を通り傾き a の直線 $y=ax$ を y 方向に b 平行移動して得られる式 $y-b=ax$ の $-b$ を右辺に移項したものと考えられる。これを一般化すると，点 (x_0,y_0) を通り傾き a の直線は，原点を通る傾き a の直線を x 方向に x_0，y 方向に y_0 だけ平行移動したものだから，

$$\text{点 } (x_0,y_0) \text{ を通り傾き } a \text{ の直線の式：}\ y-y_0=a(x-x_0)$$

となる。

定点からの距離が一定　円の方程式に入ろう。円というのは定点からの距離が一定の図形である。即ち動点 (x,y) と定点 (a,b) との距離が一定の定数 r と等しいということは

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

と記述される。これは両辺を 2 乗することにより

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1}$$

と同値である。従って，これが点 (a,b) を**中心**とする**半径** r の**円の方程式**ということになる。

平行移動　先ほど考えた平行移動を用いて求める考え方もある。原点を中心とする半径 r の円の方程式は

$$x^2+y^2=r^2 \tag{2}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

である。点 (a,b) を中心とする半径 r の円の方程式 (1) は，原点中心の円の式 (2) の x を $x-a$ に，y を $y-b$ に置き換えたものになっている。これは (2) の表す図形が (1) の表す図形を x 方向に a，y 方向に b 平行移動したものになっていることを示している。

演習問題 3.15　次に与えられる条件を満たす円の方程式を求めよ。

(1) 点 $(2,-1)$ がを中心，半径。3

(2) 点 $(-2,3)$ が中心，半径 4。

(3) 点 $(3,2)$ が中心，点 $(1,5)$ を通る。

(4) 点 $(-2,3)$ が中心，y 軸に接している。

(5) 2 点 $(-2,3),(4,1)$ を直径の両端とする。

(6) 点 $(2,4)$ が中心，半径 5。また，この円上で y 座標が 0 であるような点の座標を求めよ。

展開すると　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の左辺の 2 乗の項をそれぞれ展開し，右辺の r^2 を左辺に移項すると

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0 \tag{3}$$

となる。従って，円の方程式は一般に

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \tag{4}$$

の形をしている。逆にこの形の方程式は円の方程式かと言えば (少なくとも実数の世界では) そうではない。与えられた A,B,C に対し (5) を x に関してと y に関して別々に平方完成すれば

$$\left(x-\frac{A}{2}\right)^2+\left(y-\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C \tag{5}$$

となる。このとき，$\dfrac{A^2}{4}+\dfrac{B^2}{4}-C\geq 0$ なら $r=\sqrt{\dfrac{A^2}{4}+\dfrac{B^2}{4}-C}$ とおけば $\left(\dfrac{A}{2},\dfrac{B}{2}\right)$ を中心とする (半径 0 の場合も含めて) 半径 r の円になるが $\dfrac{A^2}{4}+\dfrac{B^2}{4}-C<0$ の時は (5) の解は空集合であり，円の方程式ではあり得ない。この逆の変形は応用上重要である。

例 3.11 (2006 年度第 1 回数理解析 0 試験) $x^2+y^2=2x-6y+3$ はどんな図形か答えよ。

解答例

$$\begin{aligned} x^2+y^2=2x-6y+3 \quad &\Longleftrightarrow \quad 0=x^2+y^2-(2x-6y+3)=(x-1)^2+(y+3)^2-13 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-1)^2+(y+3)^2=\left(\sqrt{13}\right)^2 \end{aligned}$$

であるから，点 $(1,-3)$ を中心とする半径 $\sqrt{13}$ の円。

例 3.12 $x^2+y^2=2x-6y-11$ はどんな図形か答えよ。

解答例

$$\begin{aligned} x^2+y^2=2x-6y-11 \quad \Longleftrightarrow 0 \ &=x^2+y^2-(2x-6y-11) \\ &=(x-1)^2+(y+3)^2+1\geq 1>0 \end{aligned}$$

となるので式を満たす (x,y) は存在しない。従って空集合である。

演習問題 3.16

(1) 方程式 $x^2+y^2-4x+2y-11=0$ の表す図形はどんな図形か述べ，図示せよ。
(2) 方程式 $x^2+y^2-8y+7=0$ の表す図形はどんな図形か述べ，図示せよ。
(3) 方程式 $x^2+y^2+4x+6y-3=0$ の表す図形はどんな図形か述べ，図示せよ。
(4) 方程式 $x^2+y^2-4x+2y+k=0$ が円を表すような定数 k の値の範囲を求めよ。
(5) 方程式 $x^2+y^2+2x-y+k=0$ が円を表すような定数 k の値の範囲を求めよ。

直線と円の交点の方程式と判別式　直線と円の交点，即ち共通部分とは直線の方程式を満たし同時に円の方程式も満たす点の全体であるから，直線 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ と円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の交点の方程式は

$$\begin{cases}\alpha x+\beta y+\gamma=0\\(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\end{cases}$$

である。特に $\beta\neq 0$ のときは $l=-\dfrac{\alpha}{\beta}, m=-\dfrac{\gamma}{\beta}$ とおけば，

$$\begin{cases}y=lx+m\\(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\end{cases}$$

と同値である。それはまた

$$\begin{cases}y=lx+m\\(x-a)^2+(lx+m-b)^2=r^2\end{cases}$$

に同値である。2 番目の式は y を含まず x に関する 2 次方程式である。これの判別式を D とおけば[1]

$D<0$ **のとき**	直線と円は共有点を持たない。
$D=0$ **のとき**	直線は円と 1 点で接する。
$D>0$ **のとき**	直線は円と 2 点で交わる。

が成立している。

例 3.13 円 $x^2+y^2=9$ と直線 $y=x+2$ の共有点の個数を調べよ。

解答例

$$\begin{cases}x^2+y^2=9\\y=x+2\end{cases}\iff\begin{cases}x^2+(x+2)^2=9\\y=x+2\end{cases}\iff\begin{cases}2x^2+4x-5=0\\y=x+2\end{cases}$$

最後の連立方程式の実数解の個数は $2x^2+4x-5$ の実数解の個数に等しい。($2x^2+4x-5$ の判別式) $=4^2-4\times2\times(-5)=56>0$ だから 2 個。　答：共有点の個数は 2 。

[1]答案などで断りなしにいきなり $D=\cdots$ などと書く人がいるが，D という記号は色々な意味に使われるので，一度「$\cdots$ の判別式を D とおく」という宣言をしないと読む人には理解できない。

演習問題 3.17　次の円と直線には共有点があるか？無ければ無いことを示し，あれば共有点の座標を求めよ。

(1) $x^2+y^2=4, y=x+2$　(2) $x^2+y^2=2, y=-x+2$　(3) $x^2+y^2=1, y=2x+5$

原点を中心とする半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x_0,y_0) における接線の方程式を求めよう。原点と (x_0,y_0) を結ぶ線分の傾きは $\dfrac{y_0}{x_0}$ であるから，これと直交する直線の傾きは $-\dfrac{x_0}{y_0}$ である。点 (x_0,y_0) を通り傾きが $-\dfrac{x_0}{y_0}$ の直線の式は $y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)$ である。分母を払って移項すれば

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)=0 \tag{6}$$

を得る。更に，展開して $x_0^2+y_0^2=r^2$ を用いると $x_0x+y_0y=r^2$ を得る(2)。

例 3.14 (2006 年度第 1 回数理解析 0 試験) 点 $(10,-5)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式を求めよ。

解答例 点 (α,β) で円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式は

$$\alpha(x-\alpha)+\beta(y-\beta)=0$$

これが点 $(10,-5)$ を通るための必要十分条件は $\alpha(10-\alpha)+\beta(-5-\beta)=0$ であり，

$$\begin{aligned}
\begin{cases}\alpha^2+\beta^2=25\\ \alpha(10-\alpha)+\beta(-5-\beta)=0\end{cases}
&\iff \begin{cases}\alpha^2+\beta^2=25\\ 10\alpha-5\beta-25=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\alpha^2+\beta^2=25\\ \beta=2\alpha-5\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\alpha^2+(2\alpha-5)^2=25\\ \beta=2\alpha-5\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\alpha(\alpha-4)=0\\ \beta=2\alpha-5\end{cases}\\
&\iff (\alpha,\beta)=(0,-5),(4,3)
\end{aligned}$$

対応する直線の式は $0(x-0)-5(y-(-5))=0$, $4(x-4)+3(y-3)=0$ 即ち $y=-5$ と $4x+3y-25=0$ である。

演習問題 3.18　次の各問いに答えよ。

(1) 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=2x+n$ の共有点の個数を調べよ。

(2) 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=3x+n$ の共有点の個数を調べよ。

(3) 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=mx+4$ が接するように定数 m の値を定めよ。また，その時の接点の座標を求めよ。

(4) 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=-2x+1$ の共有点の個数を求めよ。

(5) 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=\sqrt{3}x+2$ の共有点の個数を求めよ。

(2)後者の方がシンプルで印象的だが，丸暗記はよくない。$(x,y)=(x_0,y_0)$ を代入すると等式が成り立つ，即ち (x_0,y_0) を通ることと，$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ に垂直であることとがすぐわかるので理解しやすい式でもあるが，(6) ほど分かりやすくはない。その都度自力で (6) の方を導いて使うことを推奨する。

(6) 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=2x-4$ の共有点の個数を求めよ。
(7) 点 $(2,1)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の方程式および接点の座標を求めよ。

三角関数　原点を中心とする半径 1 の円のことをしばしば**単位円**と呼ぶ。単位円周上の点 (x,y) に対して，点 $(1,0)$ から出発して単位円周上を後戻りせずに反時計回りに進んで (x,y) まで到達するまでの道のり (あるいは弧の長さ) を θ とするとき，これは原点から点 (x,y) に向かって延びる半直線と x 軸の正の部分とがなす角を表している。今，(x,y) から θ が決まるように説明したが，逆に点 $(1,0)$ からの道のり θ を与えれば点 (x,y) が定まる。即ち x,y はそれぞれ θ の関数である。これらをそれぞれ $\cos\theta, \sin\theta$ と書く。

単位円周上 $(1,0)$ からの道のり θ の点の座標が $(\cos\theta, \sin\theta)$

単位円の媒介変数表示　θ を例えば 0 から 2π(単位円周 1 周分の長さ) まで動かすとちょうど 1 周するので

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

なる単位円の媒介変数表示が得られる。
一般の円の媒介変数表示　単位円を x 方向にも y 方向にも r 倍すれば，原点を中心とする半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ の媒介変数表示

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

が得られる。更にこれを x 方向に a，y 方向に b 平行移動すれば，点 (a,b) を中心とする半径 r の円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の媒介変数表示

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

が得られる。