数学序論要綱 #8

2006–6–1　　河野

3.4　不等式の表す領域

この節では不等式の表す領域を考える。前節まででは

$$\text{方程式} \Longleftrightarrow \text{図形}$$

という対応を考えたが，ここでは

$$\text{不等式} \Longleftrightarrow \text{図形}$$

という対応を考える。方程式に対応する図形は曲線であったが，不等式に対応する図形は領域になる。例から始める。

例 3.15　「$2x+3y-6<0$ を満たす点 (x,y) の全体を xy 平面上に図示せよ。」という問題を考える。求めたいのは

$$A=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x+3y-6<0\right\}$$

という図形である。$f(x,y)=2x+3y-6$ とおく。平面上の各点 (x,y) に対し $f(x,y)$ は正になることもあるし，負になることもあるし，0 になることもある。負になる領域は 0 になる直線を境界に持つと考えられるので最初に $f(x,y)=0$ となる直線を図示する。この直線で分けられる領域のどちらかが A だと考えられる。適当な点 (a,b) をとって $f(a,b)$ を計算して $f(a,b)<0$ なら $(a,b)\in A$ であるし，$f(a,b)>0$ なら $(a,b)\notin A$ であることが分かる。今 $(0,0)$ をとると $f(0,0)=-6<0$ なので $(0,0)\in A$ となる。よって A は次図の様になっている。

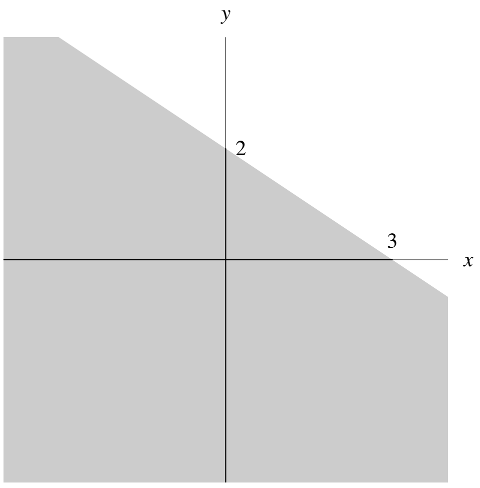

図 3.10　$2x+3y-6<0$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

この例は 2 元 1 次不等式に一般化できる。

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \alpha x + \beta y + \gamma > 0 \right\}$$

を求めることを考える。但し $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ とする。

解は直線 $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ を境にして上側の領域または下側の領域のどちらかなので，分かりやすい点 ($\gamma \neq 0$ なら原点でよい) の座標を代入して不等式を満たすかどうか調べる。< 0, $\leqq 0$, $\geqq 0$ 等の場合も同様である。

円の内部と外部　点 (a,b) を中心とする半径 r の円とは，定点 (a,b) からの距離が定数 r に等しいような動点 (x,y) の軌跡だったから，その内部とは，定点 (a,b) からの距離が定数 r より小さい：

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r$$

ような点 (x,y) の全体である。両辺を 2 乗すれば

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$$

外部は，内部 $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ と境界 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の残りの部分であるから，当然 $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ である。

円の内部	$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$
円周上	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
円の外部	$(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$

例 3.16 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 > 0$ を満たす点 (x,y) の全体を xy 平面上に図示せよ。

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 > 2^2$ であるので次図の様になる。

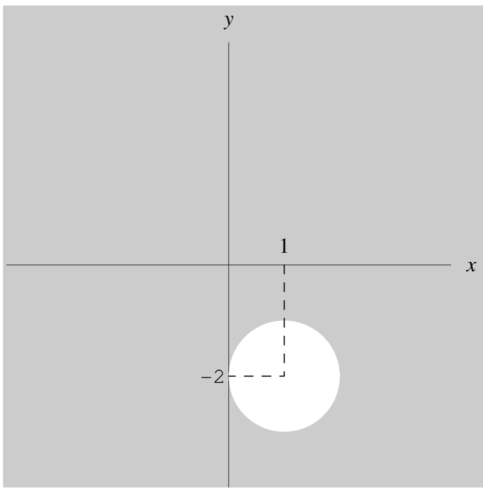

図 3.11　$(x-1)^2 + (y+2)^2 > 2^2$

一般の場合　一般に不等式 $F(x,y) > G(x,y)$ の解，即ち

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, F(x,y) > G(x,y) \right\}$$

は，方程式 $F(x,y)=G(x,y)$ の解，即ち $F(x,y)=G(x,y)$ を満たす点 (x,y) 全体のなす集合 (通常，曲線をなす) を境界に持つ領域となる。従って不等式 $F(x,y)>G(x,y)$ の解を図示するには，まず曲線 $F(x,y)=G(x,y)$ を描き，あとは分かりやすい点について解になっているかどうかを調べればよい。

与えられた連立不等式の解，即ちいくつかの不等式を同時に満たす点全体のなす領域は，当然それらの不等式それぞれの解の共通部分である。

例 3.17 $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x+y-4)(2x-y-2)\leqq 0\right\}$ を図示せよ。

$(x+y-4)(2x-y-2)$ が 0 以下になるのは因数分解した一方の因子が 0 以下で他が 0 以上のときである。よって

$$(x+y-4)(2x-y-2)\leqq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{array}{l} x+y-4\geqq 0 \text{ かつ } 2x-y-2\leqq 0,\ \text{または} \\ x+y-4\leqq 0 \text{ かつ } 2x-y-2\geqq 0 \end{array}$$

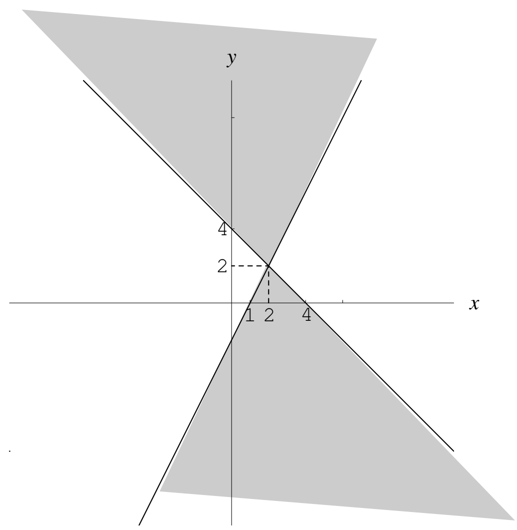

図 3.12 $(x+y-4)(2x-y-2)\leqq 0$

例 3.18 $\begin{cases}(x+y-4)(2x-y-2)\leqq 0\\ (x-y+4)y\geq 0\end{cases}$ を満たす点 (x,y) の全体を xy 平面上に図示せよ。

$$\begin{cases}(x+y-4)(2x-y-2)\leqq 0\\ (x-y+4)y\geq 0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}[(x+y-4)\geq 0 \text{ かつ } (2x-y-2)\leqq 0] \text{ または } [(x+y-4)\leqq 0 \text{ かつ } (2x-y-2)\geq 0]\\ [(x-y+4)\geq 0 \text{ かつ } y\geq 0] \text{ または } [(x-y+4)\leqq 0 \text{ かつ } y\leqq 0]\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}[y\geq 4-x \text{ かつ } y\geq 2x-2] \text{ または } [y\leqq 4-x \text{ かつ } y\leqq 2x-2]\\ [(y\leqq x+4 \text{ かつ } y\geq 0] \text{ または } [y\geq x+4 \text{ かつ } y\leqq 0]\end{cases}$$

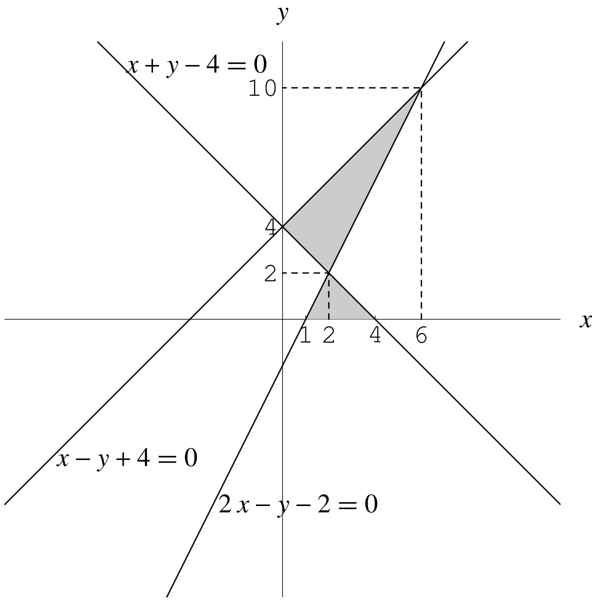

図 3.13　$(x+y-4)(2x-y-2) \leqq 0$ かつ $(x-y+4)y \geq 0$

演習問題 3.19　次の不等式の表す xy 平面上の領域を図示せよ。

(1) $y > -2x+3$　　(2) $3x-4y+12 \leqq 0$

(3) $x < 2$　　(4) $2x-3 \geq 0$

(5) $x^2+y^2 > 4$　　(6) $x^2+y^2 \leqq 16$

(7) $(x-2)^2+(y+1)^2 < 4$　　(8) $x^2+y^2+2x-6y-15 \geq 0$

(9) $y < \frac{1}{2}x+1, y > -x+4$　　(10) $x+2y-4 > 0, 3x-y+9 < 0$

(11) $y \geq -x+2, x^2+y^2 \leqq 9$　　(12) $x-y \geq 1, x^2+y^2 \geq 25$

(13) $(x-y+3)(2x+3y-6) < 0$　　(14) $xy > 0$

(15) $(x-y)(x+y-2) < 0$　　(16) $(x-2y+2)(x^2+y^2-4) \leqq 0$

(17) $(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-25) \geq 0$

演習問題 3.20　次の問いに答えよ。

(1) x, y が $9x-2y \geq 0, 3x+2y-24 \leqq 0, x-2y \leqq 0$ を満たすときの $x+y$ の最小値・最大値を求めよ。答：最小値 0 最大値 11

(2) x, y が $9x-2y \geq 0, 3x+2y-24 \leqq 0, x-2y \leqq 0$ を満たすときの $y-x$ の最小値・最大値を求めよ。

(3) x, y が $9x-2y \geq 0, 3x+2y-24 \leqq 0, x-2y \leqq 0$ を満たすときの $5x-y$ の最小値・最大値を求めよ。