数学序論要綱 #9 　　2006–6–6 　　河野

4 複素平面とオイラーの公式

4.1 複素数の四則

2 次方程式

$$x^2 = -1 \tag{1}$$

は、実数解を持たない。2 乗して負になる数は、実数には存在しないからである。2 次方程式 (1) が解を持つようにするためには、2 乗して -1 となる数の導入が必要である(1)。$i^2 = -1$ となる数を i で表し，**虚数単位**と呼ぶ。この i を用いれば，2 乗して -1，-2，-3，$\cdots$ となる数は，$\pm i, \pm\sqrt{2}i, \pm\sqrt{3}i, \cdots$ と表すことができる。このように，2 乗して負となる数を**純虚数**と呼ぶ。さらに，実数と純虚数の和

$$\alpha = a + bi \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

を**複素数**と呼ぶ。a, b をそれぞれ，複素数 α の**実部**，**虚部**と呼び，

$$a = \mathrm{Re}(\alpha), \qquad b = \mathrm{Im}(\alpha)$$

で表す。また，複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す。すなわち，

$$\mathbb{C} = \{\, a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\,\}$$

となる。さて，虚部が 0 の複素数 $(b = 0)$ は， 実数であるから，実数全体の集合$\mathbb{R}$は，複素数全体の集合$\mathbb{C}$の部分集合となっている：

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

実数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ を係数に持つ 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

の解は，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

となり，必ず複素数の範囲に解を持つ。

では，複素数 $a_n, \cdots a_0$ に対し代数方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_n \neq 0) \tag{2}$$

の解を考えるとき，さらなる数の拡張が必要となるのであろうか？この問いに対して，次の定理が成り立つ：

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(1)実際の複素数は 2 次方程式の解からではなく，3 次方程式の解の公式から考えられるに到った。最終的に実数解が得られる場合でも計算途中で 2 乗して負になる数が出てくる場合があった。最初は計算の途中ででてくる想像上の数と思われており，**虚数** (*imaginary number*) という言葉にその名残がある。

定理 4.1 [代数学の基本定理] n–次代数方程式 (2) は，いつでも n 個 (k 重解は k 個と数える) の解を複素数の範囲に持つ。

この定理により，高次の代数方程式を考えても，数の範囲を拡張する必要はないのである。すなわち，代数方程式を考える限り，複素数で十分であることが解る。

まず，2 つの複素数 $\alpha = a + bi, \beta = c + di \in \mathbb{C}$ が等しいとは，次が成り立つことである：

$$\alpha = \beta \quad \Longleftrightarrow \quad a = c, \quad b = d$$

特に,

$$\alpha = 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad a = 0, \quad b = 0$$

である。

複素数の四則演算は，$i^2 = -1$ に注意すれば，実数の場合と変わらない。加法，減法，乗法，除法は i を文字式を考え，i^2 が出てきたら -1 に変えればよい。即ち

$$\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\
(a+bi)-(c+di) &= (a-c)+(b-d)i \\
(a+bi)\cdot(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2 \\
&= (ac-bd)+(ad+bc)i \\
\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\
&= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i
\end{aligned}$$

特に，$c + di$ の逆数は,

$$\frac{1}{c+di} = \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i$$

である。

演習問題 4.1 次の計算をせよ。

(1) $(3+5i)+(4-7i)$ (2) $(2+3i)(3-4i)$

(3) $\dfrac{5+3i}{1+2i}$ (4) $\dfrac{1}{5-2i}$

4.2 複素平面

実数の集合は，数直線で幾何学的に表せる。同様に，複素数は 2 つの実数の組で決まるから，平面上の点で表すことが出来る。すなわち，$\alpha = a + bi$ とすると

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
\alpha &\longmapsto (a,b).
\end{aligned}$$

なる写像は全単射であり，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ と平面 $\mathbb{R}^2$ が同一視出来る。

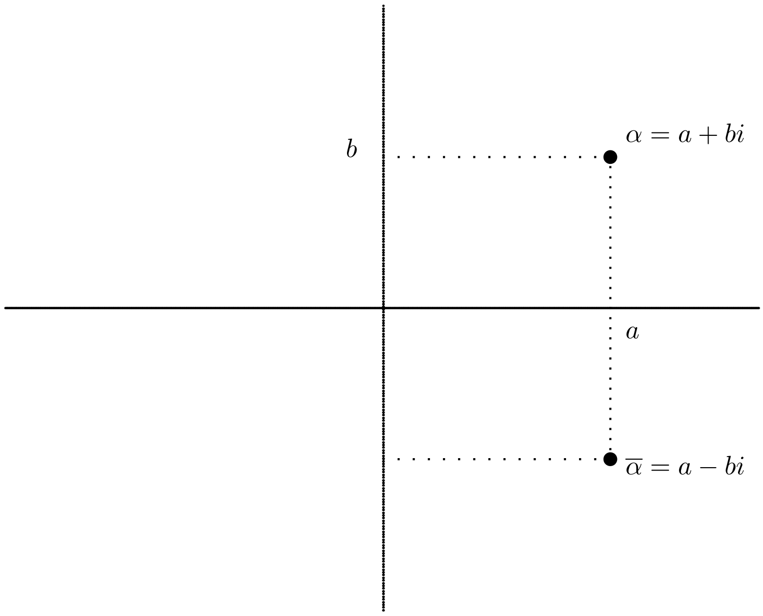

図 4.1

この平面を**複素平面**または**ガウス平面**と呼び，x 軸, y 軸 をそれぞれ**実軸**，**虚軸**と呼ぶ。複素数の演算において複素数 $\alpha = a_1 + a_2$，$\beta = b_1 + b_2 i$ の和を定めたが，$\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ の同一視を通して α, β を平面のベクトル $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ と思う事により，複素数の和 $\alpha + \beta$ は，ベクトルとしての和 $\alpha + \beta = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ と幾何学的に解釈できる。

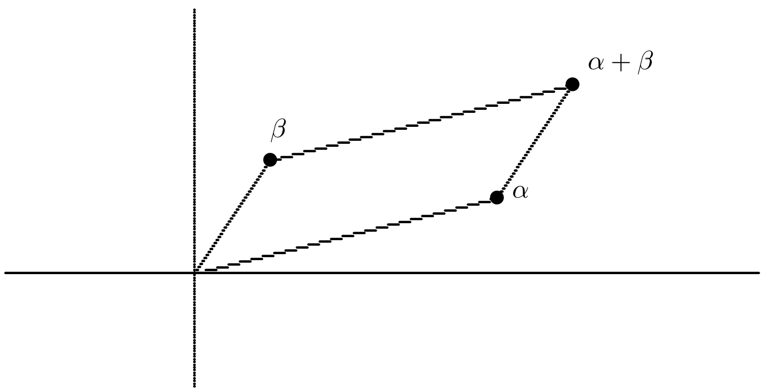

図 4.2

複素共役　複素数 $\alpha = a + bi$ に対して，

$$\overline{\alpha} = a - bi$$

を α の**複素共役**と呼ぶ。$\alpha, \overline{\alpha}$ を用いれば，複素数 α の実部，虚部は次のように表せる：

$$\mathrm{Re}(\alpha) = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(\alpha) = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i}$$

複素平面で考えると，実軸 (x 軸) に関して対称移動した点に対応するのが共役複素数である。複素数の共役に対して，次が成り立つ：

命題 4.2 複素数 α，α_1，α_2 に対して，

$$(1)\ \overline{\overline{\alpha}} = \alpha \qquad (2)\ \overline{(\alpha_1 + \alpha_2)} = \overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} \qquad (3)\ \overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2} \qquad (4)\ \overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \frac{\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}}$$

が成り立つ。

演習問題 4.2　命題 4.2 を証明せよ。

絶対値　複素数 $\alpha = a + bi$ に対して，

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \geqq 0$$

であるから，平方根がとれ，それを α の**絶対値**と呼ぶ：

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad |\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$$

複素平面において，原点 O から $\alpha = a + bi$ までの距離を r とおくと，ピタゴラスの定理より

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|$$

が成り立つ。すなわち，複素数 α の絶対値は，幾何学的にはベクトル α の**長さ**を表している。また，2 点 $\alpha = a_1 + a_2 i$，$\beta = b_1 + b_2 i$ の距離は，$\alpha - \beta$ の絶対値で与えられる。すなわち

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

が成立する (図 4.3 参照)。

演習問題 4.3　次の問いに答えよ。
(1) $\alpha = 0 \Longleftrightarrow |\alpha| = 0$ を証明せよ。
(2) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha||\beta|$ を示せ。

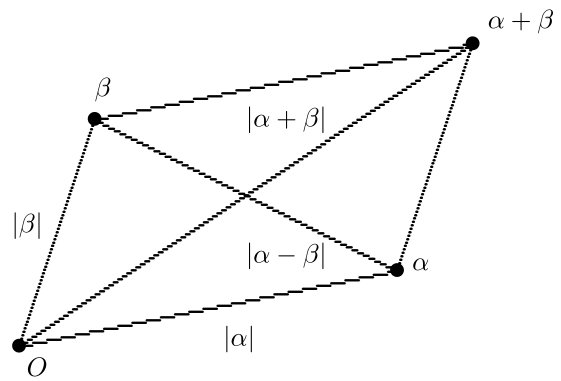

図 4.3

さて，2 点間の距離に関して次の定理が成り立つ：

定理 4.3 [三角不等式] 複素数 α, β に対して，次の不等式が成り立つ：

(1) $|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|$

(2) $|\alpha|-|\beta| \leqq |\alpha-\beta|$

演習問題 4.4 図 4.3 を参考にして定理 4.3 を証明せよ。

4.3 複素数の極形式とオイラーの公式

ここでは，複素数に対する極形式，オイラーの公式を与え，複素数の積の幾何学的意味を考える。

まず例から始めよう。$\mathbb{C}$ と複素平面の同一視の下で，複素数 $\alpha = 4+3i$ の表す平面内のベクトルを α と表すことにする。ベクトル α と実軸の正の向きとがなす角を θ とし，$4+3i$ を α の長さと θ で表してみると次の図の様になる：

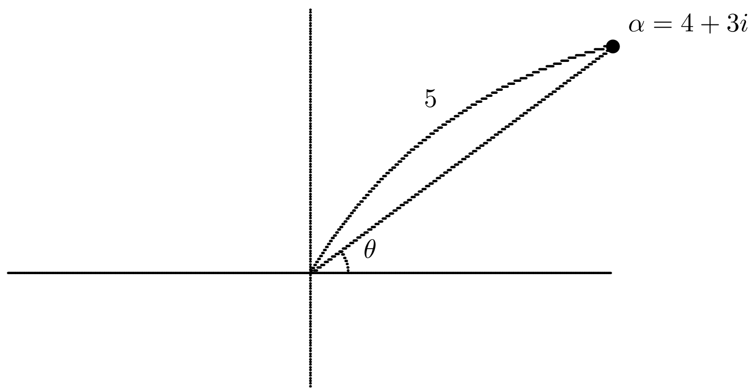

図 4.4

$$|\alpha| = \sqrt{3^2+4^2} = 5, \qquad \cos\theta = \frac{4}{5}, \qquad \sin\theta = \frac{3}{5}$$

であるから，

$$4+3i = 5\cos\theta + 5i\sin\theta = 5(\cos\theta + i\sin\theta)$$

となる。

次に，一般の場合を考えよう。複素数 $\alpha = a+bi$ に対して，ベクトル α と実軸の正の向きとが作る角を θ とおく。このとき，θ の範囲は，

$$0 \leqq \theta < 2\pi$$

の範囲で唯 1 つ定まる (θ の選び方には $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ だけの不定性があることに注意する)。ベクトル α の長さを r とすると

$$\cos\theta = \frac{a}{r}, \quad \sin\theta = \frac{b}{r} \Longleftrightarrow a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$$

が成り立っている。 従って,

$$\alpha = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

を得る。この複素数の長さ及び角度 θ を用いた表示を $\alpha = a + bi$ の**極形式**と呼び,θ を $\alpha = a + bi$ の**偏角**と呼ぶ。

演習問題 4.5　次の複素数の極形式を求めよ。
(1) $\sqrt{3} + i$　(2) -2　(3) i　(4) $2\sqrt{3} - 2i$　(5) $1 - \sqrt{3}i$

虚数 $i\theta$ を変数とする指数関数 $e^{i\theta}$ を,天下り的に次の式で定める:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

これを**オイラーの公式**[1]と呼ぶ。この公式が何故成立するかに関しては解析学 I で学ぶが,ここでは天下りに成立するものとして議論を進める。

以下,少しだけ指数関数 $e^{i\theta}$ の性質を解説する。オイラーの公式において,θ を $-\theta$ に置き換え,$\cos(-\theta) = \cos\theta$,$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ を用いると

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

が得られることに注意する。

演習問題 4.6　次の問いに答えよ。
(1) $e^{i\theta}$ は,原点を中心とする半径 1 の円上の点であることを示せ。
(2) オイラーの公式を用いて次の等式を導け。

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

指数関数 $e^{i\theta}$ に対しても実数の指数関数 e^x と同様に指数法則が成り立つのか気になるが,次の定理が成り立つ:

定理 4.4 虚数 $i\theta$ を変数とする指数関数 $e^{i\theta}$ に対して指数法則が成り立つ:

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

証明　オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と三角関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}
e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 - \sin\theta_1\cdot\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2 + \cos\theta_1\cdot\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \\
&= e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}$$

となり指数法則が成立している。 ∎

---
[1] オイラーの公式と呼ばれるものは沢山あって,一般の場合ただ「オイラーの公式」といってもどれを指すか不明確だが,この授業および解析学 I,II ではこの公式を指すものと約束する。

注意 4.5 [指数法則＝加法定理] この定理の逆，すなわち，指数関数 $e^{i\theta}$ の指数法則を仮定することにより，三角関数の加法定理が証明できる。 実際，オイラーの公式より

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 - \sin\theta_1\cdot\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2 + \cos\theta_1\cdot\sin\theta_2) \end{aligned}$$

であり一方，

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

なので，指数関数 $e^{i\theta}$ の指数法則 ($e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$) より三角関数の加法定理を得る。

さらに，定理 4.4 から次の系を得る：

系 4.6 [ド・ モアブルの公式] 自然数 n に対して，

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \qquad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

が成り立つ。

証明　定理 4.4 において，$\theta_1 = \theta_2 = \theta$ とおけば，$(e^{i\theta})^2 = e^{i(\theta+\theta)} = e^{i2\theta}$ が成り立つ。さらに定理 4.4 を適用すれば，

$$(e^{i\theta})^3 = (e^{i\theta})^2\cdot e^{i\theta} = e^{i2\theta}e^{i\theta} = e^{i3\theta}$$

を得る。以下，同様にして任意の自然数 n に対して，$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ が成り立つことが分かる (きちんと示すには数学的帰納法を用いる。演習問題 4.7 参照)。 ∎

演習問題 4.7　次の問いに答えよ。
(1) $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ を示せ。
(2) 系 4.6 を証明せよ。

複素数の極形式の話に戻ろう。オイラーの公式を用いると極形式は，次の様に書き直せる：

$$\alpha = a + ib = re^{i\theta}$$

これもまた複素数 α の**極形式**と呼ぶことにする。ここで，

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = |\alpha| \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

であった。 この極形式を用いて，複素数の積の幾何学的意味を理解しよう。

$$\alpha = r_0e^{i\lambda}, \qquad z = re^{i\theta}$$

とおく。まず，ベクトル α は長さが r_0 で実軸の正の向きとの成す角が λ のベクトル，z は長さが r で実軸の正の向きとの成す角が θ であるベクトルであった。このとき，複素数としてのの積は，

$$\alpha z = r_0e^{i\lambda}re^{i\theta} = r_0re^{i(\lambda+\theta)}$$

であるから，ベクトル z は，複素数 α を掛けることにより，長さが r_0 倍，実軸の正の向きから λ だけ回転されたベクトル αz に変換された。これが複素数の積の幾何学的意味である。とくに，$r_0 = 1$ のとき，αz は z を λ だけ反時計回りに回転させたベクトルである。

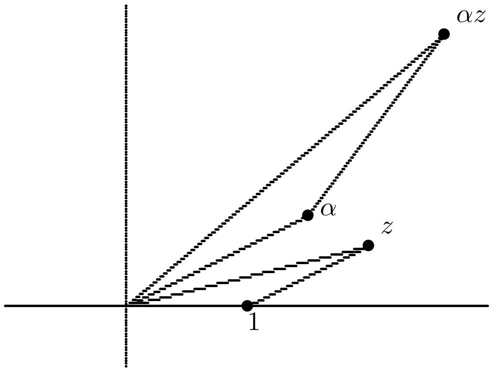

図 4.5

商に付いても,

$$\frac{z}{a} = \frac{re^{i\theta}}{r_0 e^{i\alpha}} = \frac{r}{r_0} e^{i(\theta-\alpha)}$$

より，幾何学的な意味は積と同様の考察より明らかである。

注意 4.7 $\theta+\alpha$ や $\theta-\alpha$ は 0 から 2π の範囲に入っているとは限らない。

演習問題 4.8　次の点を極形式で表し図示せよ。

(1) $\alpha = 2+2i$　(2) $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$　(3) $\alpha\beta$　(4) $\dfrac{\beta}{\alpha}$

1 の n 乗根　任意の正の整数 n に対して,

$$z^n = 1$$

が成り立つとき，z を 1 の **n 乗根** と呼ぶ。$|z|^n = 1$ 且つ $|z| > 0$ より，$|z| = 1$。すなわち，複素数 z は原点を中心とした半径 1 の円上の点である。そこで，$z = e^{i\theta}$ とおけば，ド・モアブルの公式より,

$$e^{in\theta} = 1.$$

従って,

$$n\theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

を得る。これより，方程式 $z^n = 1$ の解は,

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)^{(2)} &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \\
\exp\left(\frac{4\pi i}{n}\right) &= \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} \\
&\cdots \\
\exp\left(\frac{2(n-1)\pi i}{n}\right) &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} \\
\exp\left(\frac{2\pi n i}{\pi}\right) &= 1
\end{aligned}$$

の n 個である。

(2) 指数関数の冪の部分が複雑な場合このような記号を用いることがある。$\exp(X) = e^X$ を意味する。

1 の 4 乗根を求めてみよう。$z^4 = 1$ となる z は

$$\begin{aligned}
z_1 &= \exp\left(\frac{2\pi i}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i \\
z_2 &= \exp\left(\frac{4\pi i}{4}\right) = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = -1 \\
z_3 &= \exp\left(\frac{6\pi i}{4}\right) = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = -i \\
z_4 &= \exp\left(\frac{8\pi i}{4}\right) = \cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4} = 1
\end{aligned}$$

の 4 個である。

演習問題 4.9

(1) 1 の 3 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。

(2) 1 の 5 乗根を求め，複素平面に図示せよ。