数学序論要綱 #11

2006–6–13　　河野

5.2 単調関数と逆関数

定義 5.3 $f(x)$ を区間 I 上で定義された関数とする。

(1) $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ となる時，f は **単調増加** であるという。

(2) $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ となる時，f は **単調減少** であるという。

(3) 単調増加関数か単調減少関数を単に **単調関数** という。

明らかに次の命題が成り立つ。

命題 5.4 f を区間 I 上の単調関数とする。このとき $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ は単射である。

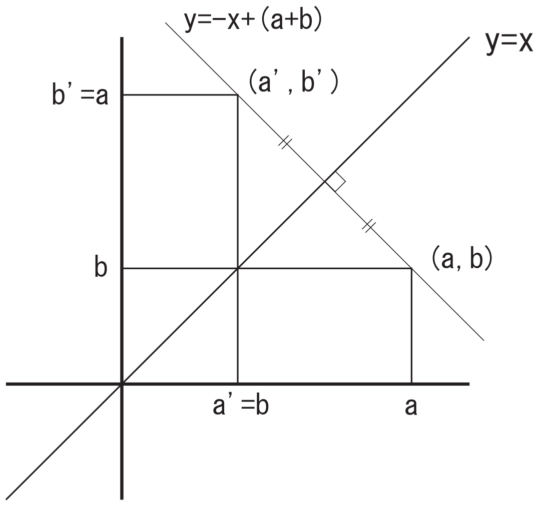
演習問題 5.4 この命題を証明せよ。

注意 5.5 関数 $f : \longrightarrow\mathbb{R}$ に関して，$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) \leqq f(x_2)$ $(f(x_1) \geqq f(x_2))$ となる時，f は I 上 **広義単調増加**（**広義単調減少**）であるという。

I, J を $\mathbb{R}$ 上の区間とする。$y = f(x)$ を I 上の関数とし，これを写像 $f : I \longrightarrow J$ と見た時に**全単射** となっているとする。この時，逆写像 $f^{-1} : J \longrightarrow I$ が存在する。これを $f : I \longrightarrow J$ の**逆関数** という。

f の定義域は I, 終域 (今の場合は値域でもある) は J である。この時に，逆関数 f^{-1} は，J を定義域とし I を終域とする。

$y = x$ に関する対称な位置　平面上の対角線となっている直線 $y = x$ に関して対称な位置，というものを考える。



(a, b) を平面上の点とする。$y = x$ に関してこの点と対称な位置にある点を (a', b') とする。

$$(a', b') = (b, a)$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

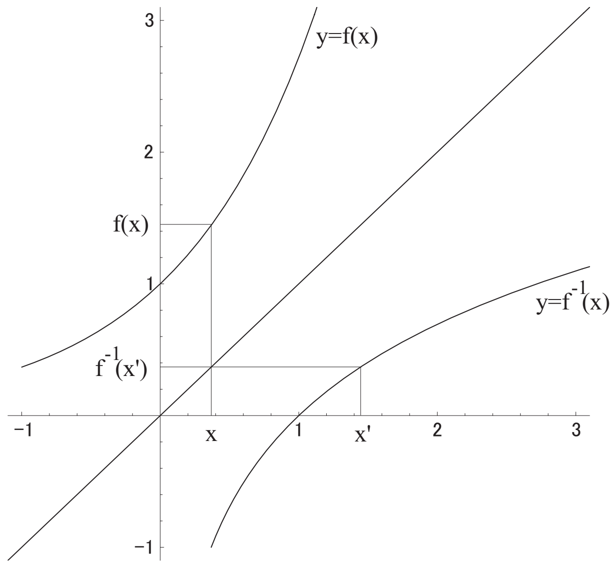
となることは図から明らかだが，一応，正確に計算してみよう。

(a,b) を通って $y=x$ に直交する直線の方程式は $y=-x+(a+b)$ である。(a',b') はこの直線上にあるので，$b'=-a'+(a+b)$ となっている。すなわち $a-a'=b'-b$ である。

また，(a,b) と (a',b') の中点は直線 $y=x$ 上にあるので，$(a+a')/2=(b+b')/2$ である。すなわち，$a+a'=b+b'$ である。

これらのことから $a'=b, b'=a$ となる。すなわち $(a',b')=(b,a)$ である。

逆関数のグラフ



一般に，関数 $f:I\longrightarrow J$ のグラフとは，平面上の $\{\,(x,f(x))\,|\,x\in I\,\}$ という集合のことである。$f:I\longrightarrow J$ が全単射である時，逆関数 $f^{-1}:J\longrightarrow I$ を考える。

$x\in I$ に対して $f(x)=x'$ とすると $x'\in J$ であり $f^{-1}(x')=x$ である。すなわち，

$$(x',f^{-1}(x'))=(f(x),x)$$

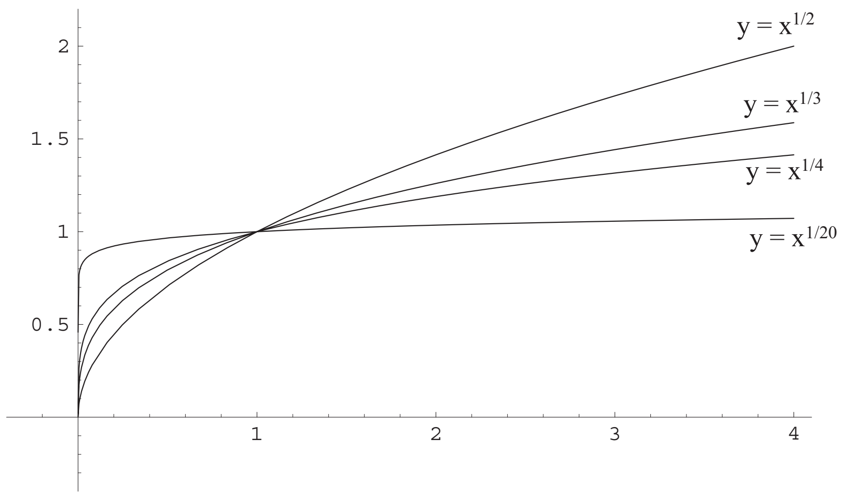
となっている。このことは，f^{-1} のグラフ上の点 $(x',f^{-1}(x'))$ は $(f(x),x)$ という点であり，これは，$f(x)$ のグラフ上の点 $(x,f(x))$ と，対角線 $y=x$ に関して対称な位置にある点である。

このことから，次が成り立つ。

命題 5.6 $f:I\longrightarrow J$ のグラフと $f^{-1}:J\longrightarrow I$ のグラフは，直線 $y=x$ に関して互いに対称な位置にある。

演習問題 5.5 単射ではない関数のグラフを，直線 $y=x$ に関して対称な位置に写すとどうなるのか述べよ。

$n\geqq 2$ を自然数とし，$f(x)=x^n$ という関数を考える。この関数は，$f:[\,0,\infty\,)\longrightarrow[\,0,\infty\,)$ という写像と見なすと全単射になっているので，逆関数 $f^{-1}:[\,0,\infty\,)\longrightarrow[\,0,\infty\,)$ が存在する。これが**べき根関数**と呼ばれる $f^{-1}(x)=x^{1/n}$ という関数である。



5.3　指数関数

定義 5.7 a を正の実数とする。
(1)　自然数 n に対して，a を n 回かけて得られる実数を a^n と表す。
(2)　$\dfrac{1}{a}$ を a^{-1} と表す。a^{-1} を n 回かけて得られる実数，すなわち $\left(a^{-1}\right)^n$ を a^{-n} と表す。
(3)　$a^0 = 1$ と定義する。
以上から，任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して a^n が定義されたことになる。

この定義から，次が成り立つことがわかる。

命題 5.8 [指数法則] a を正の実数とする。任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$a^{m+n} = a^m a^n, \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

が成り立つ。

演習問題 5.6　命題 5.8 を証明せよ。

また，等比数列の性質から，次が成り立つ。

命題 5.9 (1)　$0 < a < 1$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0, \qquad \lim_{n\to-\infty} a^n = \infty$$

(2)　$a > 1$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty, \qquad \lim_{n\to-\infty} a^n = 0$$

次に，a の 有理数乗 というものを定義する。

定義 5.10 a を正の実数とする。
(1)　自然数 n に対して，a の n 乗根，すなわち $b^n = a$ となるような正の実数 b (そのような b はただ 1 つしかない) を $a^{1/n}$ と表す。

(2) n が負の整数の場合，$a^{1/n}$ を $\dfrac{1}{a^{1/(-n)}} = \left(a^{1/(-n)}\right)^{-1}$ として定義する。

(3) p/q を 0 ではない有理数とする。ここで p, q は 0 ではない整数である。 $a^{p/q}$ を,

$$a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p$$

と定義する。

(4) $r = p/q = s/t$ を 0 ではない有理数とする。$\left(a^{1/q}\right)^p = \left(a^{1/t}\right)^s$ となることがわかる。これにより，a^r を $\left(a^{1/q}\right)^p$ により定義できる。

(5) 以上から，任意の有理数 r に対して a^r が定義された。

> このように，べき根を分数指数によって表記するという方法は，1628 年にフランスのアルベール・ジラールが著した『代数における新発見』で初めて導入された。

演習問題 5.7 　a は正の実数とする。

(1) n を自然数とする。$b^n = a$ を満たすような正の実数 b はただ一つしかないことを証明せよ。

(2) p, q が 0 ではない整数の時，$\left(a^{1/q}\right)^p = (a^p)^{1/q}$ を示せ.

(3) p, q, s, t が 0 ではない整数であって $p/q = s/t$ となっている時，$\left(a^{1/q}\right)^p = \left(a^{1/t}\right)^s$ となることを示せ。

(4) 任意の有理数 u, v に対して，次が成り立つことを示せ。

$$a^{u+v} = a^u a^v, \qquad (a^u)^v = a^{uv}$$

(5) 任意の有理数 u に対して $a^u > 0$ を示せ。

(6) $1 < a$ の時，有理数 u, v が $u < v$ ならば $a^u < a^v$ を示せ。

(7) $0 < a < 1$ の時，有理数 u, v が $u < v$ ならば $a^u > a^v$ を示せ。

任意の実数 x に対して a^x を定義することを考える。x が無理数であっても，そのいくらでも近くに有理数がある。すなわち x に収束する有理数の数列 r_n がある。a^x の値を

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

として定義する。

これにより本当に正しく定義されていることを証明するのは，実数の連続性などが絡んでくるのでかなりやっかいであり，ここでは述べない。

「有理数上まで定義して，あとは連続的に実数全体に拡張した」

と理解してもらえれば良い。

これにより，全ての実数 x に対して a^x が定義された。これを x の関数と見た時 **指数関数** という。

指数関数 a^x の性質をまとめると,

(1) 正の実数 a に対して定義される。

(2) 任意の実数 x に対して $a^x > 0$.

(3) [**指数法則**] 任意の実数 s, t に対して $a^{s+t} = a^s a^t$，$(a^s)^t = a^{st}$ 。

(4) $1 < a$ ならば a^x は単調増加。 すなわち，$s < t$ ならば $a^s < a^t$ 。

(5) $0 < a < 1$ ならば a^x は単調減少。 すなわち，$s < t$ ならば $a^s > a^t$ 。

(6) $0 < a < 1$ ならば,

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$$

(7) $1 < a$ ならば,

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

(1)〜(5) は，x が有理数の場合に成り立つ性質だったが，実数全体に連続的に拡張したので，やはり成り立つ (証明略)。(6), (7) については，整数の場合について成り立っているが，(4), (5) の a^x の単調性から，実数の場合でも成り立つ。

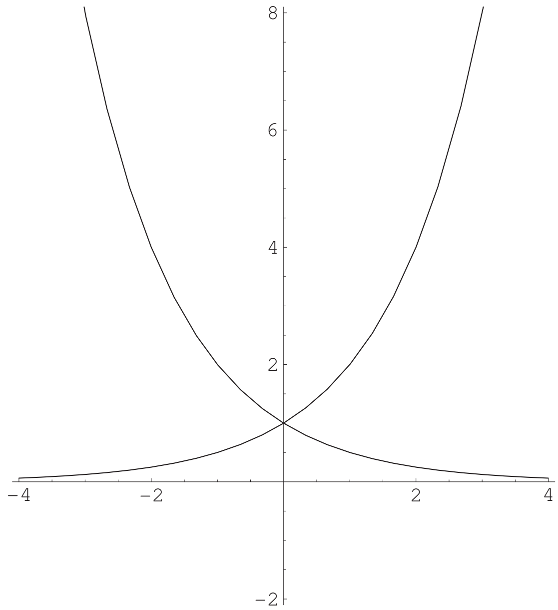


図 5.4: $y = 2^x$ と $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフ

5.4 対数関数

$a \neq 1$ を正の実数として $f(x) = a^x$ を指数関数とする。指数関数の性質のところで述べたように，$f : \mathbb{R} \longrightarrow (\,0, \infty\,)$ は単調増加か単調減少であるので単射である。また，$(\,0, \infty\,)$ の全ての値をとるので全射である。すなわち，全単射である。

従って，逆関数 $f^{-1} : (\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する。この関数を $\log_a x$ と書き，a を**底** とする**対数関数** という。

$$\boxed{y = a^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_a y}$$

指数法則より，次が成り立つ。

命題 5.11 (1) 任意の正の実数 p, q に対して次が成り立つ。

$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

(2)　任意の正の実数 p と任意の実数 c に対して次が成り立つ。

$$\log_a p^c = c\,\log_a p$$

(3)　**(底の変換)** 1 ではない任意の正の実数 a, b と任意の正の実数 p に対して次が成り立つ。

$$\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

証明　(1) a^x という関数は任意の正の実数をその値として持つから，任意の正の実数 p, q に対してある実数 s, t があって $p = a^s, q = a^t$ となる。指数法則から，$r = a^{s+t}$ とおくと，$r = a^{s+t} = a^s a^t = pq$ である。また，対数関数の定義から，$s = \log_a p,\ t = \log_a q,\ s + t = \log_a r = \log_a pq$ であるから，$\log_a r = \log_a pq = \log_a p + \log_a q$ となる。

(2) $p = a^s$ とする。指数法則から $p^c = (a^s)^c = a^{cs}$ であるから，$\log_a p^c = cs = c\,\log_a p$ が成り立つ。

(3) $b^u = p,\ b^v = a$ とすると $\log_b p = u,\ \log_b a = v$ である。

$$p = b^u = b^{\frac{u}{v}\cdot v} = (b^v)^{\frac{u}{v}} = a^{\frac{u}{v}}$$

であるから，

$$\log_a p = \frac{u}{v} = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

となる。∎

この命題から，次がわかる。

系 5.12　**(1)**　$\log_a \dfrac{1}{p} = -\log_a p$.

(2)　$\log_a \dfrac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$

このように対数は，積の計算が和の計算に置き換わる，という画期的な性質を持っている。計算機などはなく，全てを手計算で行っていた時代では，これによる恩恵は，計り知れないものがある。対数は，スコットランドのジョン・ネイピア (1550–1617) とスイスのヨプスト・ビュルギ (1552–1652) によって同じ頃に発見されたと言われているが，世に知られて，広く使われるようになったのは，ネイピアによる著作「対数の驚くべき規則の叙述」(1614 年) と「対数の驚くべき規則の構成」(1619) による。これらの本の中には，ネイピアが 20 年かけて計算した詳細な対数表が含まれており (もちろん全て手計算であるにもかかわらず，ほとんど誤りがなかった)，その後のあらゆる分野における数値計算の労力を劇的に軽減した。その意味でネイピアは，その後の科学技術の発展に多大な貢献をなしたと言える。(実際にはその後，ヘンリー・ブリッグズ，アドリアン・ヴラックらがネイピアとの議論に基づいて対数表を改良し，より詳細な表を作って 1628 年に発表した。その対数表は 20 世紀に至るまで，ほとんど全ての対数表の基礎となった。)

また，数を小数を用いて表すという，現在普通につかわれている表記方法は，ネイピアによって考え出され，上記の本で初めて現れた (小数の基本的な考え方やある種の表記方法は以前からあったが，普及していなかった)。当時も精密な計算は７〜８桁の精度で行われていたが，例えば 12.345678 は $12\,\dfrac{345678}{1000000}$ などと書かれていた。

ちなみに，自然対数の底 e を **ネイピアの定数** というが，実際，彼が最初に考えた対数は，e という数を意識はしていなかったが，基本的には自然対数であった。その後，より計算に便利な，10 を底とする常用対数を提案するようになる。

演習問題 5.8

(1) a, b, c を正の実数とする。$a^b = c^{b \log_c a}$ を示せ。

(2) a, b, c を正の実数とする。$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。

対数関数のグラフ　対数関数は指数関数の逆関数なので，そのグラフは，対応する指数関数のグラフを $y = x$ に関して対称に写せばよい。

任意の正の実数 a に対して，$a^0 = 1$ なので $\log_a 1 = 0$ である。

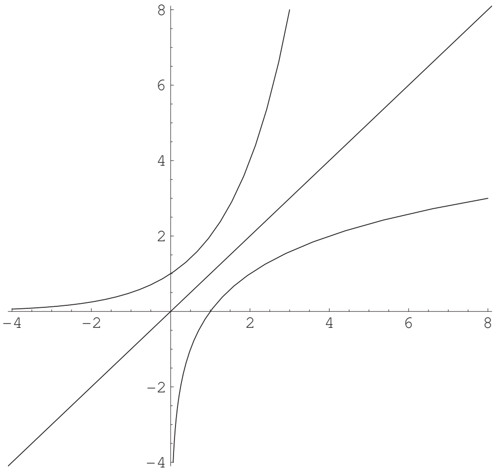


図 5.5: $y = 2^x$ と $y = \log_2 x$ のグラフ

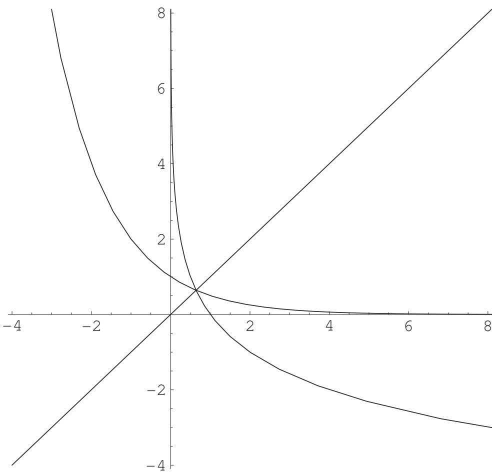


図 5.6: $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ と $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフ

5.5　逆三角関数

三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を考えてみよう。逆関数は，全単射になっていなければ定義できないが，$\sin x$, $\cos x$ は実数全体で定義された関数と見なすと単射ではない。そこで，逆関数を考えるためには，定義域を限定して，全単射になるような部分だけを取り出す必要がある。

$\sin x$ や $\cos x$ がその上で全単射になるような区間は無数にあり，そのうちのどれを採用したとしても，そこに限定した $\sin x$ や $\cos x$ は，当然，逆関数を持つ。そのような区間として，最も「標準的な」ものとしては，次のようなものが考えられる。

$f(x) = \sin x$ とする。この関数の定義域を $\left[\, -\dfrac{\pi}{2},\, \dfrac{\pi}{2} \,\right]$ に制限した関数 f (名前を変更する必要があるかもしれないが，ここでは混同して用いる) を

$$f : \left[\, -\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2} \,\right] \longrightarrow [\, -1,\, 1 \,]$$

とすると，f は全単射になる。従って，逆関数

$$f^{-1} : [\, -1,\, 1 \,] \longrightarrow \left[\, -\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2} \,\right]$$

が存在する。これを $\sin^{-1} x$ あるいは $\arcsin x$ と書く (**アークサイン** と読む)。$\sin^{-1} x$ は誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

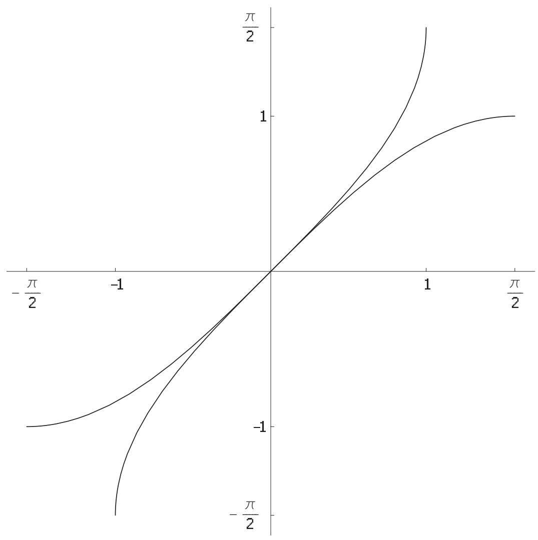


図 5.7: $\sin x$ と $\sin^{-1} x$

$g(x) = \cos x$ とする。この関数の定義域を $[\, 0,\, \pi \,]$ に制限した関数 g (名前を変更する必要があるかもしれないが，ここでは混同して用いる) を

$$g : [\, 0,\, \pi \,] \longrightarrow [\, -1,\, 1 \,]$$

とすると，g は全単射になる。従って，逆関数

$$g^{-1} : [\, -1,\, 1 \,] \longrightarrow [\, 0,\, \pi \,]$$

が存在する。これを $\cos^{-1} x$ あるいは $\arccos x$ と書く (**アークコサイン**と読む)。$\cos^{-1} x$ は誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

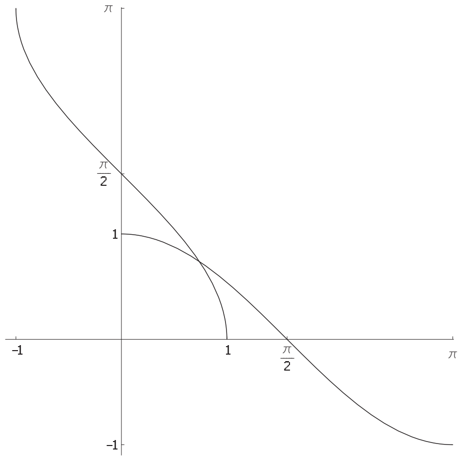


図 5.8: $\cos x$ と $\cos^{-1} x$

$\tan x$ は，任意の整数 n に対して，$\left(-\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)$ から $\mathbb{R}$ への全単射であるから，n を固定すると，$\mathbb{R}$ から $\left(-\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)$ への逆関数が存在する。

このように，逆関数のとり方は無数にあるが,「標準的」には，やはり，$\tan x$ を $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ から $\mathbb{R}$ への全単射とみなし，逆関数として，$\mathbb{R}$ から $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ への関数を採用するのが普通である。これを $\tan^{-1} x$ あるいは $\arctan x$ などと書き，**アークタンジェント** x と読む。$\tan^{-1} x$ は誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

$\arctan x$ は実数全体で定義された関数なので，$\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ という点で値が定義されない $\tan x$ と比べると，どうちらかと言うと，より「まともな」関数である，という見方もできる。

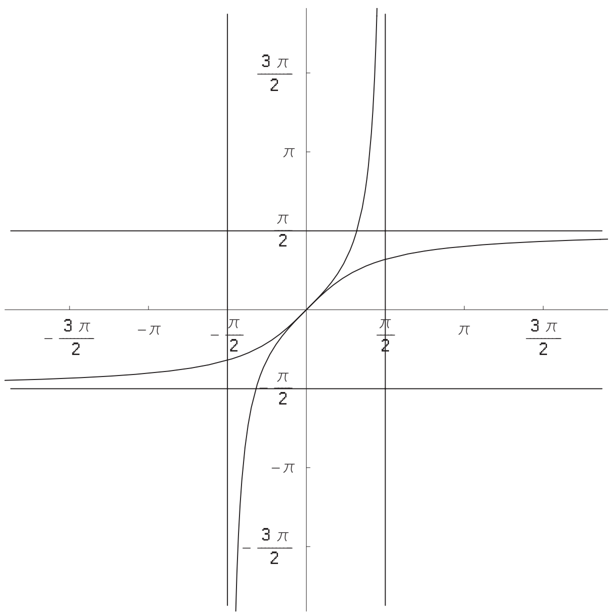


図 5.9: $\tan x$ と $\tan^{-1} x$ のグラフ

演習問題 5.9

(1) 次の値を求めよ。

$$\sin^{-1}\frac{1}{2},\quad \cos^{-1}\frac{1}{2},\quad \tan^{-1}1,\quad \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \tan^{-1}\sqrt{3},\quad \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) $-1 \leqq x \leqq 1$ の時，$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) $x > 0$ の時，$\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(4) $\tan^{-1}x = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。

5.6 双曲線関数

講義では省略したが，双曲線のパラメータ表示には次に紹介する双曲線関数が用いられる。積分でも使用する場合があるので関数を紹介しておく。パラメータ表示について一言だけふれておくと，$x = \cos t$，$y = \sin t$ は楕円の標準形ともいえる「円」

$$x^2 + y^2 = 1$$

のパラメータ表示を与えるのに対し，ここで定義する項曲線関数は双曲線の標準形ともいえる「直角双曲線」

$$x^2 - y^2 = 1$$

のパラメータ表示を与える。

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

を双曲線関数という。 cosh は**ハイパボリック・コサイン** などと読む[1]。

演習問題 5.10 次を示せ。

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

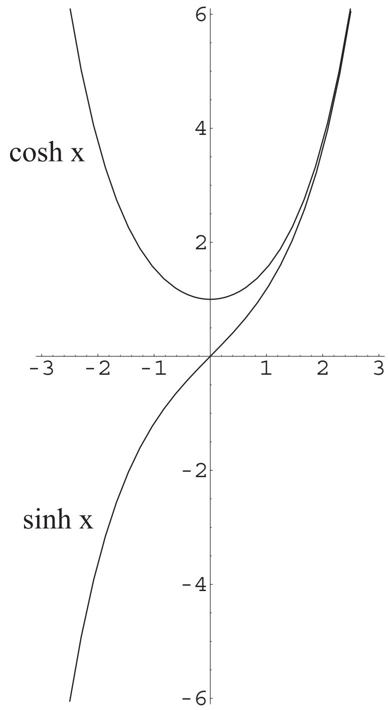
(2) $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$

(3) $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$

明らかに $\cosh x$ は偶関数であり，そのグラフは y 軸に対して対称となるが，さらに $[\,0, \infty\,)$ では単調増加となっている (微分してみるとわかる)。従って，$\cosh x$ は $[\,0, \infty\,)$ に制限すると，$[\,0, \infty\,)$ から $[\,1, \infty\,)$ への全単射を与える。

また，$\sinh x$ は奇関数であり，そのグラフは原点に関して点対称である。$\sinh x$ は $\mathbb{R}$ 全体で単調増加であり (微分してみるとわかる)，実数全ての値をとるので，$\mathbb{R}$ からそれ自身への全単射を与える。

[1] $\cosh x$ を $\cos(hx)$ だと勘違いするものがいるが，括弧を用いて表すと $\cosh(x)$ であることに注意。



演習問題 5.11

(1) $\cosh x$ を $[\,0,\infty\,)$ に制限した関数の逆関数を $\cosh^{-1} x$ とする。これは $[\,1,\infty\,)$ から $[\,0,\infty\,)$ への関数である。

$$\cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

であることを示せ。

(2) $\sinh x$ の逆関数を $\sinh^{-1} x$ とする。これは $\mathbb{R}$ 全体で定義された関数である。

$$\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

であることを示せ。

(3) $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ とする。任意の x に対して $|\tanh x| < 1$ を示せ。

(4) $\tanh x$ は単調増加関数であることを (微分を使わずに) 示せ。

$x \to -\infty$ のとき $\tanh x \to -1$ であり，$x \to \infty$ のとき $\tanh x \to 1$ であることがわかるので，

$\tanh x$ は $\mathbb{R}$ から $(-1, 1)$ への全単射を与える。従って，その逆写像 $\tanh^{-1} x$ は，$(-1, 1)$ 上で定義され，$\mathbb{R}$ 全体の値をとる単調増加関数となる。

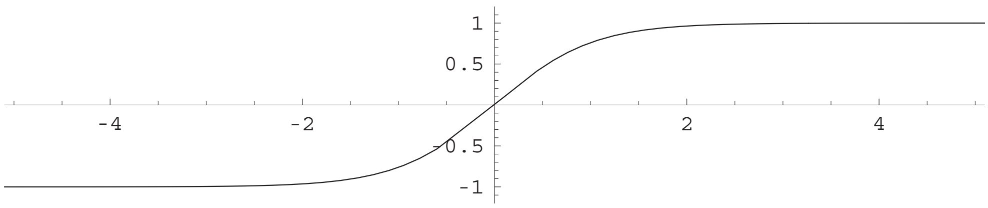


図 5.10: $\tanh x$ のグラフ