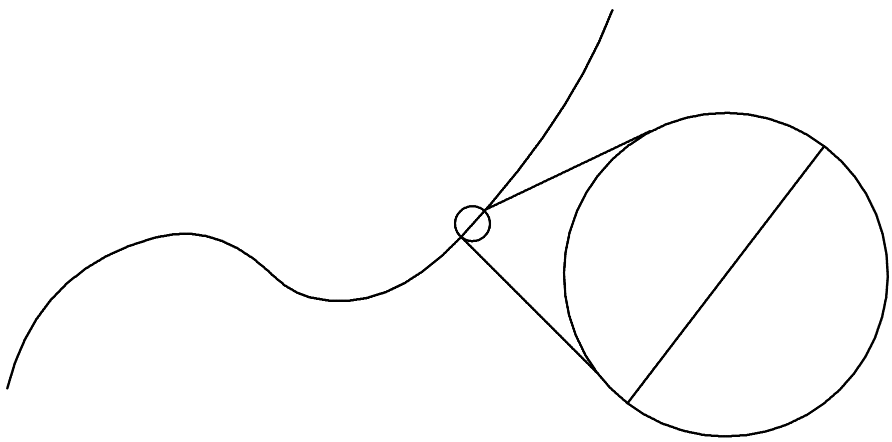
数学序論要綱 #12　　　　2006–7–4　　河野

6 微分法

6.1 微分の定義と基本的関数の導関数

我々はいろいろな関数を学んで来たが，もっとも単純な関数は一次関数であろう。一方任意の曲線 (= 関数) は，その微小な部分を拡大すれば直線 (= 一次関数) に見えてくる。この微小部分の定める線分を直線として延長すれば接線となるのでは? この考え方は**線型近似**と呼ばれる考え方であるが微分法において重要な見方である。



以上の直感的考察を，極限の概念をもちいて定式化してみよう。関数 $f(x)$ のグラフ上のお互いに近い 2 点をとる。それらを $x=a$ と $x=a+h$ に対応する点として $(a, f(x))$，$(a+h, f(a+h))$ とする。これらの 2 点を結ぶ直線の傾きは

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

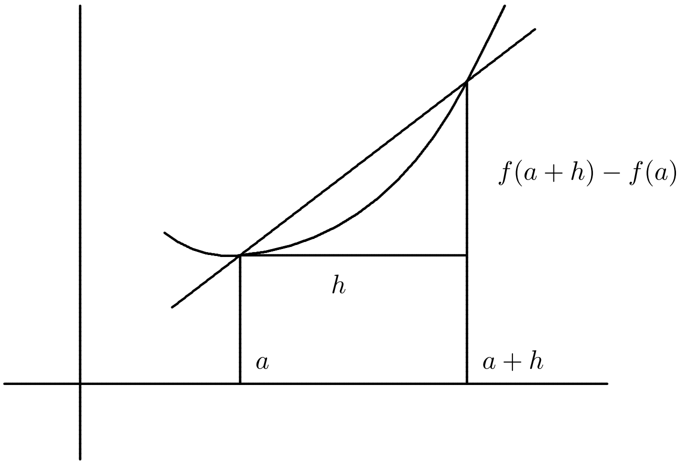
である。ここで $h \to 0$ としてみると，これは上記の曲線の微小部分を拡大していくことに対応する。よって $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の極限値が存在すれば，これが「接線」の傾きとみなすことができる。以上より次を定義する。

定義 6.1 関数 $y=f(x)$ に対し，極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1}$$

が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるといい，その極限値を $f'(a)$ と書いて，$x=a$ における $f(x)$ の**微分係数**という。さらに各 x において $f'(x)$ が存在するとき，各 x に $f'(x)$ を対応させる関数 $x \to f'(x)$ を f の**導関数**という。微分係数あるいは導関数を求めることを**微分する**という。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。



例 6.2 $f(x)=x^2$ とする。$x=a$ における微分係数を求めよう。$b=a+h$ とおけば

$$\begin{aligned}
f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{b\to a}\frac{b^2-a^2}{b-a} \\
&= \lim_{b\to a}\frac{(b-a)(b+a)}{b-a} \\
&= \lim_{b\to a}(b+a) \\
&= 2a
\end{aligned}$$

一般に $f(x)=x^n$ (n : 自然数) のとき，b^h-a^n の因数分解

$$b^n-a^n=(b-a)(b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots+b^{n-k-1}a^k+\cdots+a^{n-1})$$

および $\lim\limits_{b\to a} b^{n-k-1}a^k = a^{n-1}$ より

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{b\to a}\frac{b^n-a^n}{b-a} \\
&= \lim_{b\to a}(b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots+b^{n-k-1}a^k+\cdots+a^{n-1}) \\
&= na^{n-1}
\end{aligned}$$

である。a を x におきかえれば $y=x^n$ の導関数は

$$\bigl(x^n\bigr)'=nx^{n-1}$$

となる。

演習問題 6.1 $(a+h)^n$ の 2 項展開 $(a+h)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k a^{n-k}h^k$ をもちいて

$$\bigl(x^n\bigr)'=nx^{n-1}$$

を示せ。

さて関数 $y = f(x)$ の導関数は

$$f'(x), \quad y', \quad \frac{df}{dx}(x), \quad \frac{dy}{dx}$$

等と書かれ，また $f'(x)$ の定義は次のように表示できる。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2}$$

ただし $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ である。

例 6.3 $\bigl(\sin x\bigr)' = \cos x$

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ であった。これより

$$\begin{aligned}
\bigl(\sin x\bigr)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{ \cos x \frac{\sin h}{h} + \sin x \frac{\cos h - 1}{h} \right\} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

演習問題 6.2 $\bigl(\cos x\bigr)' = -\sin x$ を示せ。

例 6.4 $\bigl(e^x\bigr)' = e^x$

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ より

$$\bigl(e^x\bigr)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

(1) で $x = a + h$ とおけば $f'(a) = \displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ となるので，

$$\varepsilon(x) = f'(a) - \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3}$$

とおけば $x \to a$ のとき $\varepsilon(x) \to 0$ である。(3) は

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \tag{4}$$

と変形できる。x が a の近くを動くとき，$\varepsilon(x)$，$(x - a)$ は小となるのでそれらの積 $\varepsilon(x)(x - a)$ は 1 次の項 $f'(a)(x - a)$ に比較してより小となり近似式

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x - a)$$

が成立している。右辺は $x = a$ における $f(x)$ の接線の式であることに注意する。また (4) より

定理 6.5 関数 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能ならば，$x = a$ で連続

証明 (4) より

$$f(x) - f(a) = f(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a)$$

よって $x \to a$ のとき $f(x) - f(a) \to 0$

演習問題 6.3 逆は成立しない。反例をあげよ。

6.2　微分公式といろいろな関数の導関数

6.1 節において微分の定義と $x^n, \sin x, e^x$ の微分を計算したが，一般の関数の微分を定義 6.1 にしたがって計算することは煩雑である。しかし我々が通常利用する関数はベキ関数，三角関数，指数関数から和・差・積・商および合成によって作られる関数である。よって次の定理を確認しておけば，定義にもどって導関数を計算する必要はない。

定理 6.6 $f(x)$，$g(x)$ を微分可能な関数とする。このとき $kf(x)$，$f(x) \pm g(x)$，$f(x) \cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も微分可能で

(1) $\bigl(kf(x)\bigr)' = kf'(x)$

(2) $\bigl(f(x) \pm g(x)\bigr)' = f'(x) \pm g'(x)$

(3) $\bigl(f(x)g(x)\bigr)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$　　(ただし $g(x) \neq 0$ とする)

証明

(1) $\bigl(kf(x)\bigr)' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = k \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = kf'(x)$

(2)

$$\begin{aligned}
\bigl(f(x) \pm g(x)\bigr)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\bigl(f(x+h) \pm g(x+h)\bigr) - \bigl(f(x) \pm g(x)\bigr)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} = f'(x) \pm g'(x)
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\bigl(f(x)g(x)\bigr)' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\bigl(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)\bigr) + \bigl(f(x)g(x+h) - f(x)g(x)\bigr)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\bigl(f(x+h)g(x) - f(x)g(x)\bigr) + \bigl(f(x)g(x) - f(x)g(x+h)\bigr)}{g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

以上で定理 6.6 は証明されたが特に定理 6.6 (3) が重要でありかつまちがえやすい。

次に合成関数の微分法式を与える。

定理 6.7 関数 $z = f(y)$, $y = g(x)$ がそれぞれ，y, x について微分可能とすると，合成関数 $z = f(g(x))$ は x について微分可能で

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df}{dx}(g(x)) \frac{dg}{dx}(x)$$

である。

証明　$x = a$ で考える。また $b = g(a)$ とおく。微分可能性より (4) と同様に

$$g(a+h) - g(a) = g'(a)h + \varepsilon(h)h \tag{5}$$

と書ける。ただし $\varepsilon(h) \to 0$ $(h \to 0)$ である。また

$$f(b+k) - f(b) = f'(b)k + \widetilde{\varepsilon}(k)k \tag{6}$$

で，$\widetilde{\varepsilon}(k) \to 0$ $(k \to 0)$ でもある。(5) と $b = g(a)$ より $g(a+h)$ を

$$g(a+h) = b + k$$

と書く。ただし $k = g'(a)h + \varepsilon(h)h$ である。すると $h \to 0$ のとき $k \to 0$ で

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g'(a)h + \varepsilon(h)h}{h} = g'(a)$$

となることに注意する。よって (6) から

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(f(b+k) - f(b)\big) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(f'(b)\frac{k}{h} + \widetilde{\varepsilon(k)}\frac{k}{h} \right) \\
&= f'(b)g'(a) \\
&= f'(g(a))g'(a)
\end{aligned}$$

定理 6.7 に関しては

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

という記法も便利である (連鎖公式)。ただし左辺の z は合成して $z = f(g(x))$，すなわち x の関数と見，右辺の z は $z = f(y)$ すなわち y の関数とみている。また右辺分母の y は独立変数，分子の y は x の関数 $y = g(x)$ であることに注意。

演習問題 6.4　次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(1) $y=x^3$ (2) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

(3) $y=\cos 2x$ (4) $y=\log x$

注意：「定義に基づいて」というのは微分法の諸公式を用いず定義から計算することにより求めることをいう。$y=f(x)$ の導関数なら $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を計算することにより求める。

演習問題 6.5　次の有理関数の導関数を求めよ。

(1) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ (2) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ (3) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$

演習問題 6.6　次の関数を微分せよ。

(1) x^2+3x+2 (2) $3\sin x+2e^x$ (3) $(x^2+2)(x^2+3)$

(4) $\sin(3x+1)$ (5) $e^x\sin x$ (6) $x^2\cos(x^2+1)$

$y=e^x$ の逆関数は $y=\log x$ であった。また我々は逆三角関数 $y=\arcsin x$ 等を導入した。ここで一般に逆関数の微分可能性を調べよう。関数 $y=f(x)$ に対し，その逆関数のグラフは f のグラフを y 軸からながめたものにすぎない。一方 f が微分可能とはグラフの各点で接線が引けるということであった。グラフは x 軸からみようと，y 軸からみようと接線が引けるという事実はかわらない。したがって f が微分可能ということと f^{-1} が微分可能ということは同等であろう。実際

定理 6.8 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在するとする。$f(x)$ が微分可能かつ $f'(x)\neq 0$ ならば f^{-1} も微分可能である。さらに $b=f(a)$ $(a=f^{-1}(b))$ とすると

$$\left(f^{-1}\right)'(b)=\frac{1}{f'(a)} \tag{7}$$

証明　$f^{-1}(b+h)=a+k$ とおくと，$b+h=f(a+k)$ でありまた $h\to 0$ のとき $k\to 0$ である。よって

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{(a+k)-a}{f(a+k)-f(a)}\\&=\lim_{k\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(a+k)-f(a)}{k}}\\&=\frac{1}{f'(a)}\end{aligned}$$

以上で逆関数の微分可能性が証明された。定理 6.8 は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

とも書かれる。

例 6.9 $\left(\arcsin x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=\arcsin x$ は定理 6.8 で微分可能である。ここで

$$x=\sin y\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

なので

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

となる。$-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos y \geqq 0$ が成立している。$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より $\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y}$ となるが，$\cos y \geqq 0$ より $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ となる。よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

を得る。$y = \arcsin x$ は区間の両端 $x = -1$ および $x = 1$ で微分可能でないことを注意しておく。

例 6.10 $\bigl(\log x\bigr)' = \dfrac{1}{x}$
$y = \log x$ とおくと

$$x = e^{\log x} = e^y$$

なので

$$\frac{dx}{dy} = e^y = x$$

となる。よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{x}$$

を得る。

演習問題 6.7　次を示せ。
(1) $\bigl(\arctan x\bigr)' = \dfrac{1}{1+x^2}$　(2) $\bigl(\arccos x\bigr)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

演習問題 6.8　次を示せ。

$$y = \log|x| \ (x \neq 0) \text{ とおくと } y' = \frac{1}{x}$$

演習問題 6.9　次を示せ。

$$\left\{x \arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right\}' = \arctan x$$

最後に合成関数の微分公式の応用として対数微分法を説明する。

例 6.11 $y = x^x \ (x > 0)$ を微分せよ。
両辺の対数をとると

$$\log y = \log x^x = x \log x$$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = \bigl(x\bigr)' \log x + x\bigl(\log x\bigr)' = \log x + 1$$

$$\because y' = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$$

例 6.12 $y = x^\alpha$ ($x > 0$, α は任意の実数) とするとき

$$y' = ax^{\alpha-1}$$

実際，$\log y = \alpha \log x$ の両辺を x で微分し

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

$$\because y' = \alpha x^\alpha x^{-1} = \alpha x^{\alpha-1}$$

これよりたとえば

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \left\{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}' = \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

等の計算が正当化される。このように両辺の対数をとって微分することを対数微分法といい，$\{f(x)\}^{g(x)}$ の形の関数の微分計算において有効である。

演習問題 6.10 対数微分法をもちいて次の微分をもとめよ。

(1) $x^{\sin x}$ (2) $\sqrt{\dfrac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}}$