## 6.3 接線と法線の方程式

$y = f(x)$ という関数のグラフを考える．$x = a$ における値を $b = f(a)$ とすると，このグラフは平面上の $(a, b)$ という点を通る．

この点を通り，このグラフに接している直線の方程式を求めてみよう。このような直線を，この点における関数 $y = f(x)$ の**接線**という。この直線は点 $(a, b)$ を通り，傾きが $f'(a)$ であるので，その方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + b$$

となる。書き換えると，

$$f'(a)x - y - (f'(a)a - b) = 0$$

となる。

$y = f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a)) = (a, b)$ を通り，このグラフの接線に直交する直線の方程式を求めてみよう。このような直線を，この点における関数 $y = f(x)$ の**法線**という。

この直線は点 $(a, b)$ を通り，傾きが $-\dfrac{1}{f'(a)}$ であるので，その方程式は

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + b$$

となる。このような表示では，当然 $f'(a) \neq 0$ でなければならない。しかし，両辺に $f'(a)$ をかけることにより，

$$x + f'(a)y - (a + f'(a)b) = 0$$

となる。この表示の場合は $f'(a) = 0$ でも問題はない。そのときは方程式は $x - a = 0$ となる。

**演習問題 6.11**

**(1)** $f(x) = x^2 + x + 1$ とする。$(1, 3)$ における $f$ のグラフの接線と法線の方程式を求めよ。

**(2)** $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$ のグラフに接し，$y = 2x + 1$ と平行な直線の方程式を求めよ。

**(3)** 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ 上に相異なる 2 点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ をとったとする。この放物線の接線で，線分 $PQ$ に平行となるのは，どの点における接線か？ その点の $x$ 座標の値を求めよ。

## 6.4 平均値の定理

**定理 6.13** [**連続関数の最大値最小値定理**] 閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数は，$[a, b]$ 上で最大値と最小値をとる。言い換えると，ある $p, q \in [a, b]$ が存在して，任意の $x \in [a, b]$ に対して $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ となる。

---

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

この定理を簡単に**最大値定理**と呼ぶ場合もある。

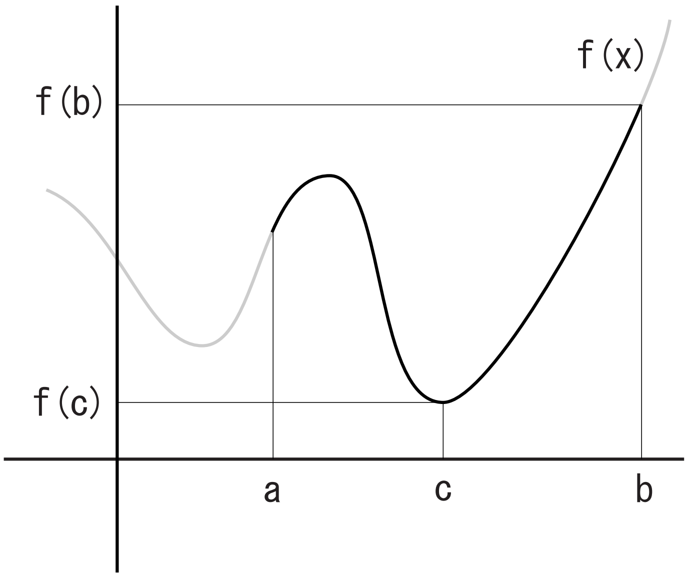



図 6.1: 最大値定理

**定理 6.14 [Rolle の定理]** $f$ は $[a,b]$ で連続で $(a,b)$ で微分可能とする。もし $f(a)=f(b)$ ならば，ある $c\in(a,b)$ が存在して $f'(c)=0$ となる。

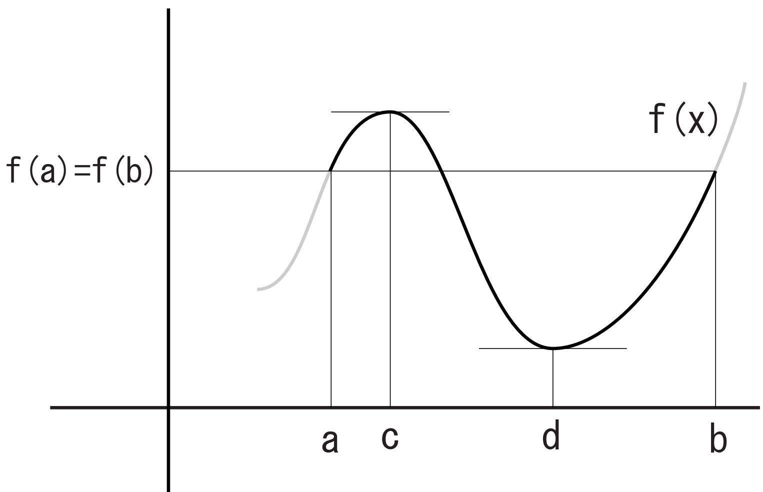



図 6.2: Rolle の定理： $f'(c)=f'(d)=0$

**証明**　$f$ が $[a,b]$ 上で定数値関数，すなわち任意の $x$ に対して $f(x)=f(a)=f(b)$ ならば，任意の $x\in(a,b)$ に対して $f'(x)=0$ である。

定数値関数ではないと仮定する。$f$ は $[a,b]$ で連続なので，定理 6.13 より，ある $p,q\in[a,b]$ が存在して，任意の $x\in[a,b]$ に対して $f(p)\le f(x)\le f(q)$ となる。

$f$ は定数値関数ではないので，$f(p) < f(a) = f(b)$ となるか又は $f(a) = f(b) < f(q)$ である。なぜなら，もしそうならないとすると，$f(a) = f(b) \leq f(p)$ かつ $f(q) \leq f(a) = f(b)$ であるが，$f(p)$ は最小値なので $f(p) \leq f(a) = f(b)$ でなければならず，$f(p) = f(a) = f(b)$ となり，$f(q)$ は最大値なので $f(a) = f(b) \leq f(q)$ でなければならず，$f(q) = f(a) = f(b)$ となるので，$f$ は定数値関数となってしまい，定数値関数ではないという仮定に矛盾する。

$f(p) < f(a) = f(b)$ であるとする。$f(a) = f(b) < f(q)$ となる場合の証明も同様である。

$f(p) \neq f(a) = f(b)$ なので $p \in (a, b)$ である。従って $f$ は $p$ で微分可能である。$f'(p) = 0$ である。なぜなら，

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \tag{1}$$

であるが，$f(p)$ は最小値なので，$p + h \in (a, b)$ となるくらい小さい任意の $h$ に対して $f(p+h) - f(p) \geq 0$ である。$h > 0$ ならば $\dfrac{f(p+h) - f(p)}{h} \geq 0$ なので，$h$ が正の方向から 0 に近づくと $f'(p) \geq 0$ となる。また $h < 0$ ならば $\dfrac{f(p+h) - f(p)}{h} \leq 0$ なので，$h$ が負の方向から 0 に近づくと $f'(p) \leq 0$ となる。$f$ は $p$ で微分可能ということは，$h$ がどのように 0 に近づいても (1) は同じ値に収束しなければならないから，$f'(p) = 0$ でなければならない。∎

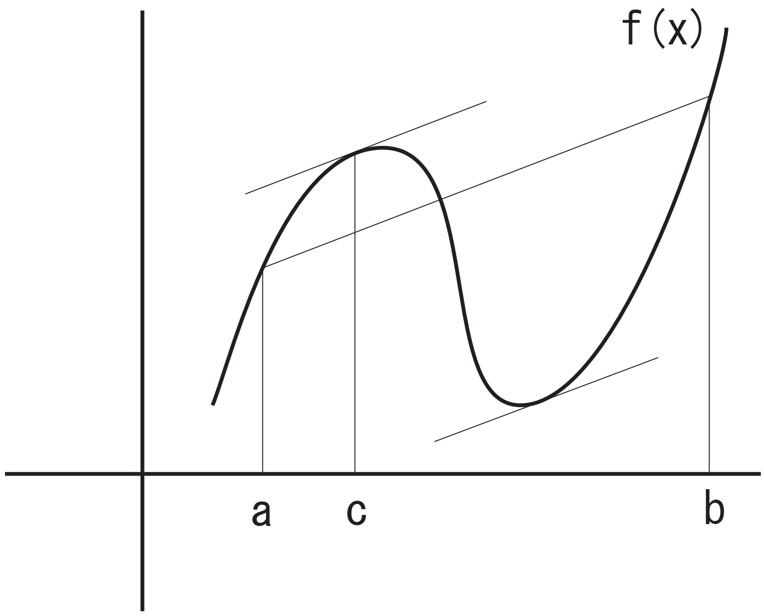



図 6.3: 平均値の定理： $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

**定理 6.15** [**平均値の定理**] $f$ は $[a, b]$ で連続で $(a, b)$ で微分可能とする。ある $c \in (a, b)$ が存在して $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ となる。

**証明**

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

とすると，$g(x)$ は $f(x)$ に 1 次関数を加えただけのものなので，$f(x)$ と同様に $[a,b]$ で連続で $(a,b)$ で微分可能である。また明らかに $g(a) = g(b) = 0$ である。従って Rolle の定理より，ある $c \in (a,b)$ が存在して，$g'(c) = 0$ となる。

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

なので，

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

である。∎

## 6.5 平均値の定理の応用

**定理 6.16 (1)** $f$ は区間 $(a,b)$ 上で微分可能であり，任意の $x \in (a,b)$ に対して $f'(x) = 0$ であるとする。この時，$f$ は $(a,b)$ 上，定数値関数である。($a$, $b$ はそれぞれ $-\infty$, $\infty$ でもよい。)

**(2)** $f$, $g$ は区間 $(a,b)$ 上で微分可能であり，任意の $x \in (a,b)$ に対して $f'(x) = g'(x)$ であるとする。この時，ある定数 $C$ があって，任意の $x \in (a,b)$ に対して $f(x) = g(x) + C$ となる。($a$, $b$ はそれぞれ $-\infty$, $\infty$ でもよい。)

**証明**
**(1)** $p, q \in (a,b)$ を任意の 2 点とする。$p < q$ であるとすると，$f$ は $[p,q]$ 上連続であり，$(p,q)$ 上で微分可能であるから，平均値の定理より，ある $c \in (p,q)$ があって

$$f'(c) = \frac{f(q) - f(p)}{q - p}$$

となるが，$f'(c) = 0$ なので $f(q) - f(p) = 0$ である。すなわち，$(a,b)$ 上の任意の 2 点における値が等しいので，$f$ は定数値関数である。
**(2)** $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと，任意の $x \in (a,b)$ に対して $h'(x) = 0$ である。(1) より，$h(x)$ は定数値関数であるので，ある定数 $C$ があって，任意の $x \in (a,b)$ に対して $h(x) = C$ となっている。すなわち，$f(x) = g(x) + C$ である。∎

**定理 6.17** $f$ は区間 $[a,b]$ 上で連続で $(a,b)$ 上で微分可能であるとする。

**(1)** 任意の $x \in (a,b)$ で $f'(x) > 0$ ならば，$f$ は $[a,b]$ 上で（狭義）単調増加である。すなわち，$[a,b]$ における任意の $x_1 < x_2$ に対して $f(x_1) < f(x_2)$ となる。

**(2)** 任意の $x \in (a,b)$ で $f'(x) < 0$ ならば，$f$ は $[a,b]$ 上で（狭義）単調減少である。すなわち，$[a,b]$ における任意の $x_1 < x_2$ に対して $f(x_1) > f(x_2)$ となる。

**証明**　(1) のみを証明する。(2) の証明も同様である。
　任意の $x \in (a,b)$ で $f'(x) > 0$ とする。$[a,b]$ における任意の 2 点 $x_1 < x_2$ をとる。平均値の定理より，ある $c \in (x_1, x_2)$ があり，

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

となる。$f'(c)>0$ であり $x_2-x_1>0$ なので $f(x_2)-f(x_1)>0$ でなければならない。■

この定理の逆は必ずしも成り立たないが，単調性の条件を緩めて等号を加えれば，必要十分の関係になる。

**定理 6.18** $f$ は区間 $[a,b]$ 上で連続で $(a,b)$ 上で微分可能であるとする。

**(1)** $f$ が $[a,b]$ 上で（広義）単調増加，すなわち，$[a,b]$ における任意の $x_1<x_2$ に対して $f(x_1)\leq f(x_2)$ となるための必要十分条件は，任意の $x\in(a,b)$ で $f'(x)\geq 0$ となることである。

**(2)** $f$ が $[a,b]$ 上で（広義）単調減少，すなわち，$[a,b]$ における任意の $x_1<x_2$ に対して $f(x_1)\geq f(x_2)$ となるための必要十分条件は，任意の $x\in(a,b)$ で $f'(x)\leq 0$ となることである。

**証明** (1) のみを証明する。(2) の証明も同様である。

任意の $x\in(a,b)$ で $f'(x)\geq 0$ となるならば広義単調増加となることの証明は，上の定理の証明と同様である。逆を証明する。

$f$ は広義単調増加であるとする。$x\in(a,b)$ において $f'(x)$ を求める。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

であるが，$h>0$ ならば，$f$ は広義単調増加なので，$f(x+h)-f(x)\geq 0$ である。すなわち $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$ である。また，$h<0$ ならば，$f$ は広義単調増加なので，$f(x+h)-f(x)\leq 0$ となり，やはり $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$ である。$h$ がどちらの方向から 0 に近づいても，$f'(x)$ は非負実数の極限値となるので，$f'(x)\geq 0$ である。■

## 6.6 関数のグラフ

**定義 6.19** **(1)** $f$ を微分可能関数とする。$f'(c)=0$ となる点 $c$ を $f$ の **臨界点** という。

**(2)** $c$ は，その近くの任意の $x$ に対して $f(x)<f(c)$ となるとき **極大点** という[(1)]。

**(3)** $c$ は，その近くの任意の $x$ に対して $f(x)>f(c)$ となるとき **極小点** という。

**演習問題 6.12** 極大点，極小点は臨界点であることを証明せよ。

臨界点 $c$ に対して，「$f''(c)\neq 0$ ならば $c$ は極大点か極小点である」ということを「解析学１」で示す。従って，この命題の対偶をとると，

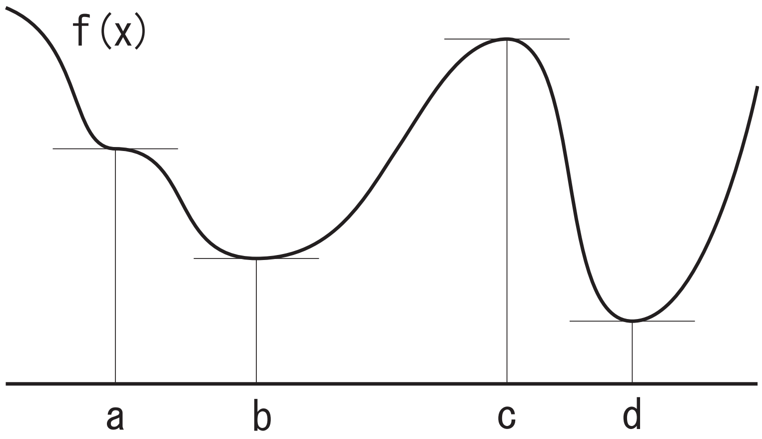
「臨界点が極大か極小ではないなら $f''(c)=0$ である。」

ということがわかる。

(注意： グラフの凹凸が変化する点を変曲点という。$f''(c)=0$ であって $f'''(c)\neq 0$ ならば，臨界点であってもなくても，それは変曲点になる。)

臨界点を求め，それらで挟まれる区間における導関数の値の正負を調べることにより，関数のグラフの概形を描くことができる。導関数の値や関数値の増減を一覧表にしたものを，その関数の **増減表** という。

[(1)]「任意と存在」を用いて数学的に厳密に述べると「ある正の数 $\delta$ が存在して，任意の実数 $x$ に対し $0<|x-c|<\delta\Longrightarrow f(x)<f(x)$」である。




| $x$ | | $a$ | | $b$ | | $c$ | | $d$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $f(a)$ | $\searrow$ | $f(b)$ | $\nearrow$ | $f(c)$ | $\searrow$ | $f(d)$ | $\nearrow$ |

**例 6.20** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ のグラフの概形を描く。

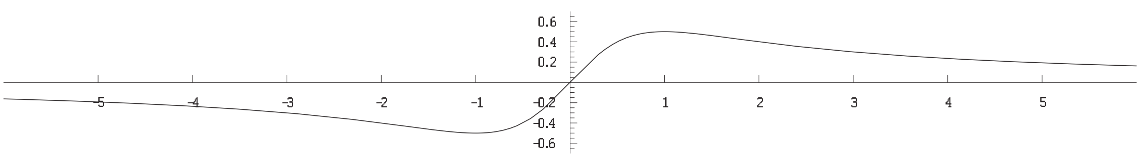
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

であるから，臨界点は $x = \pm 1$ である。$f(-1) = -\dfrac{1}{2}$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$ より，増減表を作ると，

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ |

となり，$-1$ は極小点，$1$ は極大点であることがわかる。

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ に注意すると，グラフの概形は次のようになることがわかる。




**演習問題 6.13** 以下の関数のグラフの概形を描け。

(1) $f(x) = 2x^2 - x^4$　　(2) $f(x) = xe^{-x}$　　(3) $f(x) = x^2 \log x$

(4) $f(x) = 3\sin x + \sin 3x$　　(5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$　　(6) $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

(7) $f(x) = x + 2\cos x$　　(8) $f(x) = \sin x(1+\cos x)$　　(9) $f(x) = x^{-x^2}$

**パラメータ表示された曲線の概形**

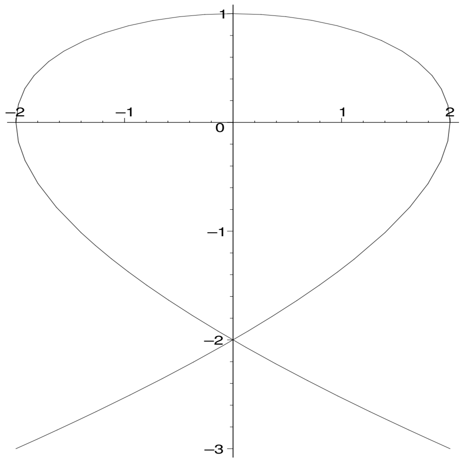
パラメータ表示された曲線の概形を書くというのも大切である。$(x(t), y(t))$ とパラメータ表示されている場合，関数 $x(t), y(t)$ の概形が分かれば，それを組み合わせることにより書くことができる。

$x = x(t) = 3t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2$ でパラメータ表示された曲線の概形を書こう。

$x' = 3 - 3t^3$ より $t = \pm 1$ において $x' = 0$ となる。$y' = -2t$ より $t = 0$ において $y' = 0$ となる。よって増減表は以下の様になる。

| $t$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x$ | $\leftarrow$ | | $\rightarrow$ | $\rightarrow$ | $\rightarrow$ | | $\leftarrow$ |
| $y'$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $y$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| 曲線 | $\nwarrow$ | $\uparrow$ | $\nearrow$ | $\rightarrow$ | $\searrow$ | $\downarrow$ | $\swarrow$ |

$x = 0$ となるのは $t = 0, \pm\sqrt{3}$, $y = 0$ となるのは $t = \pm 1$ に注意して概形を描くと次の様になる。




**演習問題 6.14**　次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

(1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$

(2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$

## 6.7　不定形の極限とロピタルの定理

$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ という形の極限を考えるとき，$f(a) = g(a) = 0$ あるいは，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ となる場合，これを **不定形の極限** という。

不定形の極限を求める場合，次の定理が便利である。

**定理 6.21 [L'Hôpital の定理]** $f$, $g$ は $a$ の周りで微分可能とする。$f(a)=g(a)=0$ あるいは，$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ かつ $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ となるとき，$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して，両者の値は一致する。ここで $a$ は $\pm\infty$ でもよい。

**証明**　$a$ がある実数であって $f(a)=g(a)=0$ の場合について証明する。その他の場合の証明は，ちょっとやっかいな場合もあるのでここでは述べない。

$b$ を $a$ の近くの値とし，$h(x)=(f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)$ とおくと，$h(b)=h(a)=f(b)g(a)-f(a)g(b)$ となる。Rolle の定理より，$(a,b)$ あるいは $(b,a)$ の中のある $c$ があって $h'(c)=0$ となる。$h'(x)=(f(b)-f(a))g'(x)-(g(b)-g(a))f'(x)$ であるから，$h'(c)=(f(b)-f(a))g'(c)-(g(b)-g(a))f'(c)=0$ すなわち $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ である。

$f(a)=g(a)=0$ であるから，$\frac{f(b)}{g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ である。$b\to a$ のとき $c\to a$ であり，$\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}$ は存在するから，$\lim_{b\to a}\frac{f(b)}{g(b)}$ も存在して，両者は一致する。 ∎

**例 6.22**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \tag{1}$$

を求める。 $x=0$ のとき，分母と分子は共に $0$ となるので，これは不定形の極限である。分母と分子の関数の導関数で見てみると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} \tag{2}$$

となって，やはり不定形の極限である。さらに，これの分母と分子の関数の導関数で見てみると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}$$

となり，これは不定形の極限ではなく，極限値 $1/2$ を持つ。そうすると，L'Hôpital の定理より，(2) も同じ値に収束することがわかる。そうすると再び L'Hôpital の定理より，(1) も $1/2$ に収束することが示される。

**演習問題 6.15**　以下の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to +0} x^x$　(2) $\lim_{x\to +0} x^{\frac{1}{x}}$　(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)}$　(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos(\alpha x)}{\log\cos(\beta x)}$　(6) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$　$(a,b>0)$

(7) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{e^x}$　(8) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+3^x)}{x}$　(9) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$

(10) $\lim_{x\to 0} x\log x$　(11) $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$　(12) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$