数学序論要綱 #A

河野

A　いろいろな曲線

A.1　楕円

楕円の幾何学的定義　2 定点からの距離の和が一定であるような点の軌跡を**楕円**という。より詳しく言えば，ある 2 定点 F, F' とある正の数 d に対して，$FP + F'P = d$ を満たす点 P の全体を楕円と呼ぶ。また，このとき，点 F, F' をこの楕円の**焦点**と呼ぶ。

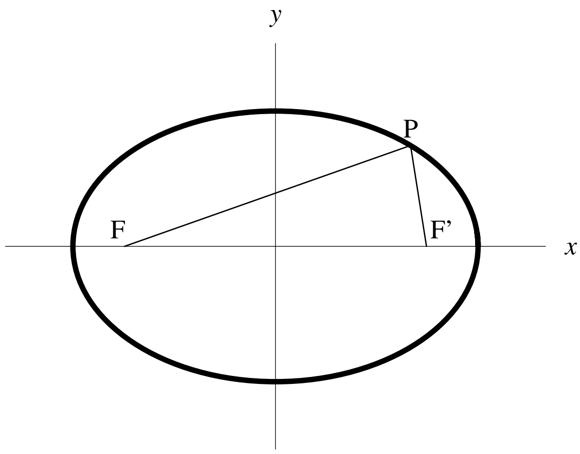

図 A.1　楕円の幾何学的定義

楕円の方程式　焦点の座標を $(-\alpha, 0), (\alpha, 0)$（ただし $\alpha > 0$）とすると，点 (x, y) とそれぞれの焦点との距離は $\sqrt{(x+\alpha)^2 + y^2}$, $\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}$ であるからこれらの距離の和がある一定の値 d を取るための条件は

$$\sqrt{(x+\alpha)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2} = d$$

である。これを変形して根号 (ルート) のない式にしてみよう。距離 d は 2 点 F, F' の距離より長くなければならないので $0 < 2\alpha < d$ が成立している。このとき $\sqrt{(x+\alpha)^2 + y^2} = d - \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}$ と移行して両辺を 2 乗すると

$$(x+\alpha)^2 + y^2 = d^2 - 2d\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2} + (x-\alpha)^2 + y^2$$

となりより

$$2d\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2} = d^2 - 4ax$$

となる。さらに両辺を 2 乗すると

$$4d^2\left((x-\alpha)^2 + y^2\right) = d^4 - 8ad^2x + 16a^2x^2$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

となる。これを整理して

$$\frac{4}{d^2}x^2 + \frac{4}{d^2 - 4\alpha^2}y^2 = 1$$

を得る。$a = \dfrac{d}{2}$，$b = \dfrac{\sqrt{d^2 - 4a^2}}{2}$ とおくと

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \tag{1}$$

である。(1) を楕円の方程式の標準形と呼ぶ。逆に言うと

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \text{ は } \begin{cases} a > b \text{ のとき } (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0) \text{ を焦点とする楕円} \\ a < b \text{ のとき } (0, \pm\sqrt{b^2 - a^2}) \text{ を焦点とする楕円} \end{cases}}$$

である。

演習問題 A.1　次の曲線の概形を xy 平面上に描け。

(1) $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$　(2) $x^2 + 4y^2 = 4$　(3) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

(4) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$　(5) $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$　(6) $9x^2 + 4y^2 = 1$

円の 1 次変換としての楕円　(1) に

$$\begin{cases} x = aX \\ y = bY \end{cases} \tag{2}$$

を代入すると単位円の方程式

$$X^2 + Y^2 = 1 \tag{3}$$

になるから，楕円 (1) は，単位円 (3) を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍したものである。

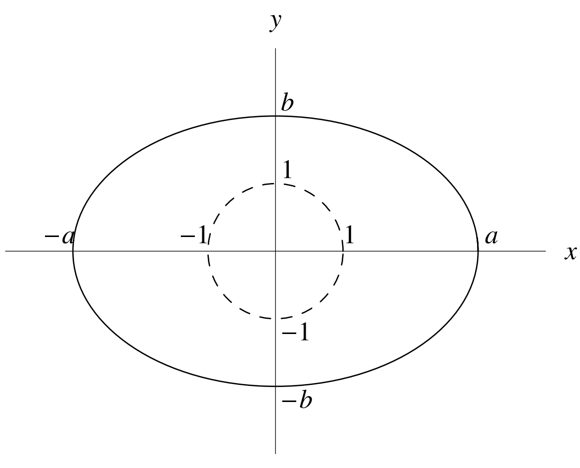

図 A.2　円の 1 次変換

点 (x, y) が楕円の上にあるための条件は X 方向に $\dfrac{1}{a}$ 倍, y 方向に $\dfrac{1}{b}$ 倍して戻してやった $\left(\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}\right)$ が，元の円の方程式を満たすこと，即ち $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ である，と考えておくと，変換の式 (2) を書かずに理解することが出来る。

なお，$(-a, 0)$ と $(a, 0)$ を両端とする線分をこの楕円の**長軸**と言い，$(0, -b)$ と $(0, b)$ を両端とする線分を**短軸**と言う。

例 A.1 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ で表される図形の概形を xy 平面上に描け。

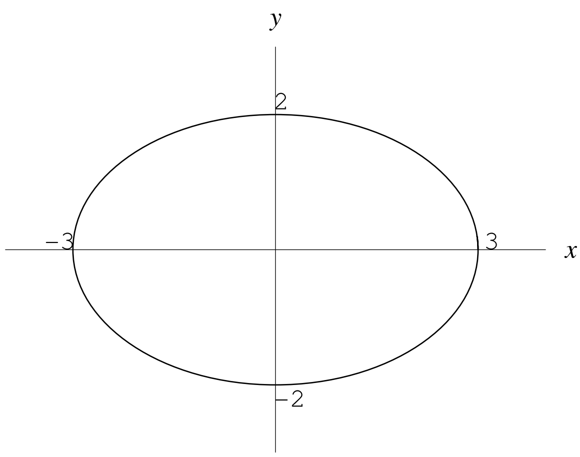

図 A.3 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

演習問題 A.2 与えられた方程式から楕円の長軸・短軸の長さを求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ (2) $x^2 + 4y^2 = 4$ (3) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

(4) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ (5) $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ (6) $9x^2 + 4y^2 = 1$

楕円の媒介変数表示 単位円 $X^2 + Y^2 = 1$ の媒介変数表示

$$\begin{cases} X = \cos\theta \\ Y = \sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

と (2) を用いて，楕円 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ の媒介変数表示

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\,\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

を得る。円のときと違ってこれは等速運動ではない。

演習問題 A.3 楕円の媒介変数表示の θ を時間と思ったときの点 (x, y) の運動の速さを求めよ。

楕円の標準形の平行移動　標準形の方程式

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

で表される楕円を x 方向に α，y 方向に β 平行移動した図形の方程式は，(いつものように点 (x,y) を x 方向に $-\alpha$，y 方向に $-\beta$ 平行移動して戻した $(x-\alpha,y-\beta)$ が元の図形上にあるための条件だから)

$$\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2=1$$

である。これを展開すると

$$b^2x^2+a^2y^2-2b\alpha x-2a\beta y+b\alpha^2+a\beta^2-a^2b^2=0$$

となる。つまり

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0\ \text{(ただし }A,C>0\text{ とする)} \tag{4}$$

の形の式になる。逆に (4) の形の式が与えられれば，所謂「平方完成」により

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F$$

と変形できる。ここで左辺について，任意の x,y に対して

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2\geqq 0$$

であり，等号は $x=-\dfrac{D}{2A},y=-\dfrac{E}{2C}$ のときのみ成り立つことに注意する。従って $K=\dfrac{D^2}{4A}+\dfrac{E^2}{4C}-F$ と置けば，$K<0$ のときは右辺が負であるのに左辺は 0 以上なので，解は空集合。$K=0$ のときは一点 $x=-\dfrac{D}{2A},y=-\dfrac{E}{2C}$ となる。$K>0$ のときは両辺を K で割ることにより

$$\left(\frac{x+\dfrac{D}{2A}}{\sqrt{\dfrac{K}{A}}}\right)^2+\left(\frac{y+\dfrac{E}{2C}}{\sqrt{\dfrac{K}{C}}}\right)^2=1$$

とできる。これは標準形の方程式の表す楕円の平行移動になっている。

例 A.2 $9x^2+4y^2+18x-16y-11=0$ はどのような図形を表すか？また，その概形を描け。

$$\begin{aligned}9x^2+4y^2+18x-16y-11=0 &\iff 9(x+1)^2+4(y-2)^2=36\\ &\iff \left(\frac{x+1}{2}\right)^2+\left(\frac{y-2}{3}\right)^2=1\end{aligned}$$

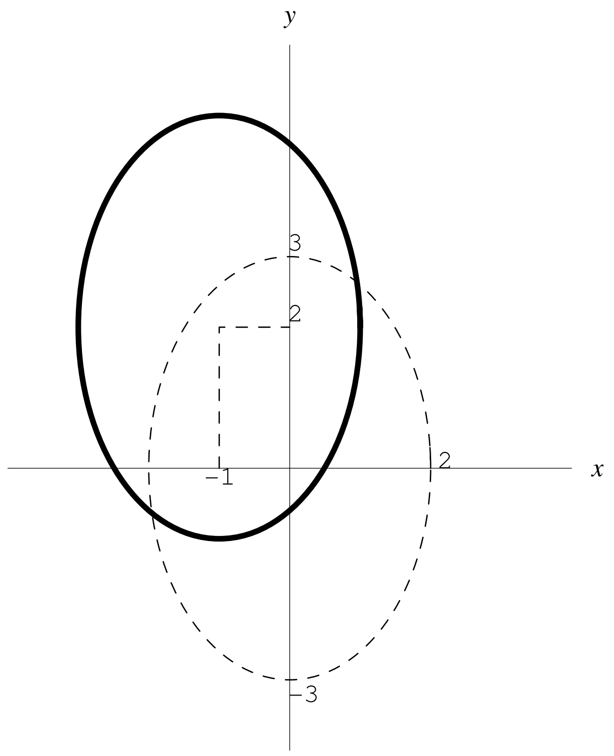

図 A.4 $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y-2}{3}\right)^2=1$

A.2 双曲線

双曲線の幾何学的定義　2 定点からの距離の差が一定であるような点の軌跡を**双曲線**という。より詳しく言えば，ある 2 定点 F, F' とある正の数 d に対して，$|FP-F'P|=d$ を満たす点 P の全体を双曲線という。また，このとき，点 F, F' をこの双曲線の**焦点**と呼ぶ。

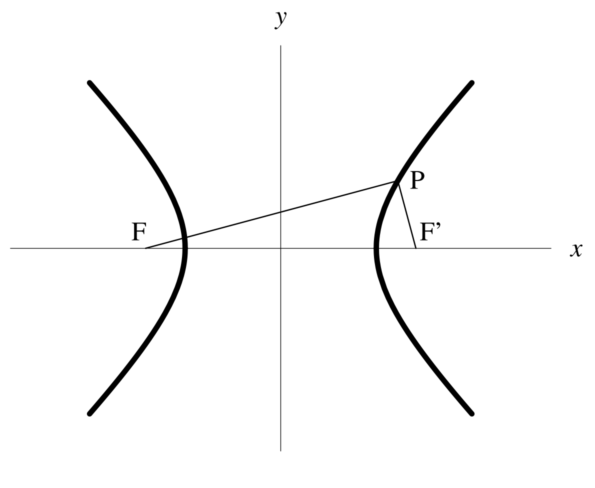

図 A.5 双曲線の幾何学的定義

双曲線の方程式　焦点の座標を $(-\alpha, 0), (\alpha, 0)$(ただし $\alpha>0$) とすると，点 (x, y) とそれぞれの焦点との距離は $\sqrt{(x+\alpha)^2+y^2}$, $\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}$ であるからこれらの距離の差がある一定の値 d

を取るための条件は

$$\left|\sqrt{(x+\alpha)^2+y^2}-\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}\right|=d$$

である。これを変形して根号 (ルート) のない式にしてみよう。距離の差が d である点が存在するためには $d \leqq 2\alpha$ が必要である。また $d=0$ の場合には求める曲線は垂直 2 等分線になり，$d=2\alpha$ のときは 2 点を通る直線になるので $0<d<2\alpha$ の条件を仮定する。両辺を 2 乗して

$$d^2=(x+\alpha)^2+y^2-2\sqrt{(x+\alpha)^2+y^2}\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}+(x-\alpha)^2+y^2$$

を得る。これを

$$2\sqrt{\left((x+\alpha)^2+y^2\right)\left((x-\alpha)^2+y^2\right)}=2\left(x^2+\alpha^2+y^2\right)-d^2$$

と変形して更に 2 乗して変形すると，

$$\frac{4}{d^2}x^2-\frac{4}{4\alpha^2-d^2}y^2=1$$

となる。$\dfrac{d}{2}=a,\ \dfrac{\sqrt{4\alpha^2-d^2}}{2}=b$ とおけば

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \tag{1}$$

である。これを双曲線の標準形の方程式という。逆に言うと

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \text{ は } (\pm\sqrt{a^2+b^2},0) \text{ を焦点とする双曲線}}$$

である。

双曲線の形状　双曲線の方程式 (1) の x と y を入れ換えて

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2-\left(\frac{x}{b}\right)^2=1$$

としよう。

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2-\left(\frac{x}{b}\right)^2=1 \Leftrightarrow y=\pm a\sqrt{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2}$$

であるから，関数 $f(x)=a\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{b}\right)^2}$ の形状を調べれば宜しい。まず f は偶関数であるので f のグラフは y 軸に関し対称であることに注意する。

$$f'(x)=\frac{a}{b^2}x\left(1+\left(\frac{x}{b}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{a}{b^2}\left(1+\left(\frac{x}{b}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}>0$$

から f は $x<0$ で減少，$x>0$ で増加，f のグラフは下に凸である。概形は

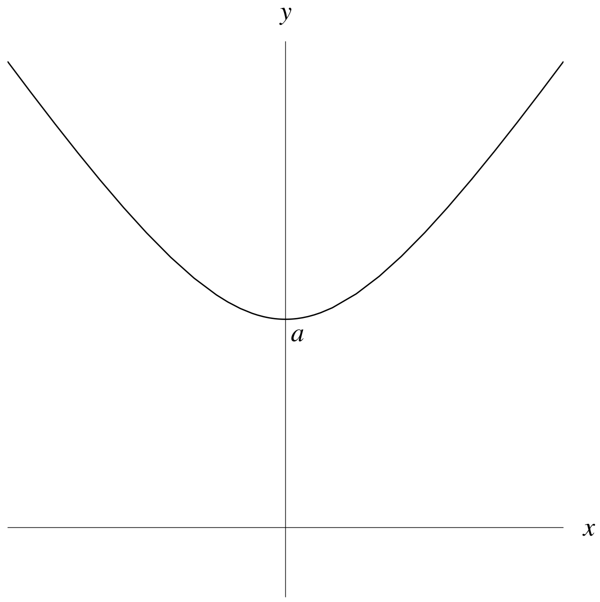

図 A.6　$f(x) = a\sqrt{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2}$ のグラフ

演習問題 A.4　与えられた曲線の概形を xy 平面上に描け。

(1) $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{4} = 1$　(2) $x^2 - 4y^2 = 4$　(3) $-\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

(4) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$　(5) $x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1$　(6) $9x^2 - 4y^2 = 1$

漸近線　$f(x) = a\sqrt{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2}$ において x の絶対値が非常に大きいときには $\left(\frac{x}{b}\right)^2$ と較べて 1 は非常に小さいので，$1+\left(\frac{x}{b}\right)^2$ は $\left(\frac{x}{b}\right)^2$ は非常に近いと考えられ，従って $f(x) = a\sqrt{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2}$ は $a\sqrt{\left(\frac{x}{b}\right)^2} = \frac{a}{b}|x|$ に非常に近いと考えられる。実際，2 つの関数の差の極限を考えると

$$
\begin{aligned}
a\sqrt{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2} - \frac{a}{b}|x| &= a\frac{\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2} - \frac{|x|}{b}\right)\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2} + \frac{|x|}{b}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2} + \frac{|x|}{b}} \\
&= a\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2} + \frac{|x|}{b}} \to 0\,(x \to \pm\infty)
\end{aligned}
$$

となる。このことは幾何学的には，関数 f のグラフ $y = f(x)$ が $x \to \infty$ のときは直線 $y = \frac{a}{b}x$ に，$x \to -\infty$ のときは直線 $y = -\frac{a}{b}x$ にそれぞれ限りなく近づくことを意味する。この意味で $y = \pm\frac{a}{b}x$ を $y = f(x)$ の**漸近線**という[1]。

---

[1] 正確には，$y = \frac{a}{b}x$ が $y = f(x)$ の $x \to \infty$ のときの漸近線，$y = -\frac{a}{b}x$ が $y = f(x)$ の $x \to -\infty$ のときの漸近線というべきであろう。

双曲線 $\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{b}\right)^2 = 1$ は $y = \pm f(x)$ からなり，$y = -f(x)$ は $x \to \infty$ のときは直線 $y = -\frac{a}{b}x$ に，$x \to -\infty$ のときは直線 $y = \frac{a}{b}x$ にそれぞれ限りなく近づくので，$y = \pm\frac{a}{b}x$ は双曲線 $\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{b}\right)^2 = 1$ の**漸近線**と呼ばれる。

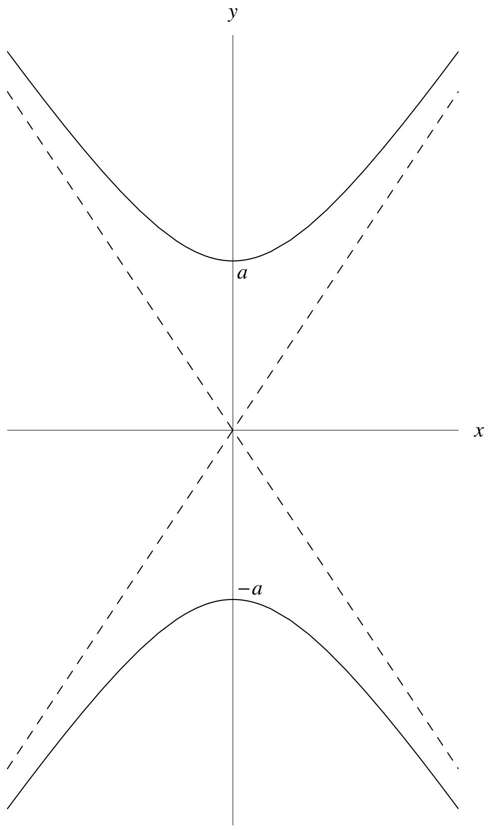

図 A.7 双曲線 $\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{b}\right)^2 = 1$ とその漸近線 $y = \pm\frac{a}{b}x$

直角双曲線　漸近線が直交するような双曲線を**直角双曲線**という。双曲線 $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ の漸近線 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \pm\frac{1}{b} \end{pmatrix}$ であるから，この 2 つが直交するための条件は

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow a = b\,(\text{仮定により } a, b > 0 \text{ であった})$$

従って

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1 \quad \text{あるいは} \quad x^2 - y^2 = a^2$$

が直角双曲線の標準形ということになる。これらは a がどんな値のときも $y=\pm x$ を漸近線に持つ。一般の双曲線に対する直角双曲線は，一般の楕円に対する円に相当する。

回転移動した図形の方程式　原点を中心にした正の向き θ の回転移動が線型写像であることは明らかである。従って行列を掛けることによって記述できる。この行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の行き先はこれを原点中心に θ 回転させた $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の行き先はこれを原点中心に θ 回転させた $\begin{pmatrix} \cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ であるので

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

即ち

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となる。一般に点 (x,y) を原点中心に θ 回転移動した点 (x',y') は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる訳である。さて，一般に方程式 $F(x,y)=0$ で表される図形 (曲線) を原点中心に θ 回転させた図形の方程式は，点 (x,y) を逆に原点中心に $-\theta$ 回転させて戻した点 $(x\cos(-\theta)-y\sin(-\theta), x\sin(-\theta)+y\cos(-\theta)) = (x\cos\theta+y\sin\theta, -x\sin\theta+y\cos\theta) = (X,Y)$ が，元の図形の上にあるための条件を書けばよいので，

$$\begin{aligned} (x,y)\text{ が }\theta\text{ 回転させた曲線上にある} &\iff (X,Y)\text{ がもとの曲線上にある} \\ &\iff F(X,Y)=0 \end{aligned}$$

となり，

曲線 $F(x,y)=0$ を原点中心に θ 回転させた曲線の方程式は $F(x\cos\theta+y\sin\theta, -x\sin\theta+y\cos\theta)=0$

となる。

反比例のグラフと直角双曲線　反比例のグラフ $y = \dfrac{c}{x}$(ただし $c > 0$) 言い換えると $xy = c$ を，原点中心に θ 回転させた曲線の方程式は

$$
\begin{aligned}
&(x\cos\theta + y\sin\theta)(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c \\
\iff & -(\cos\theta\sin\theta)x^2 + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)xy + (\cos\theta\sin\theta)y^2 = c \\
\iff & -\frac{\sin 2\theta}{2}x^2 + (\cos 2\theta)xy + \frac{\sin 2\theta}{2}y^2 = c \qquad (2)
\end{aligned}
$$

である。特に $\cos 2\theta = 0$ になるような角度，例えば $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ を取れば，$\sin 2\theta = -\sin\dfrac{\pi}{2} = -1$ で (2) は

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c \text{ あるいは } \left(\frac{x}{\sqrt{2c}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2c}}\right)^2 = 1$$

であって，上の 4.4 で言うところの直角双曲線の標準形の方程式である。言い換えると，反比例のグラフ $y = \dfrac{c}{x}$ は，直角双曲線 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2c}}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{\sqrt{2c}}\right)^2 = 1$ を原点中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転移動させたものになっている。

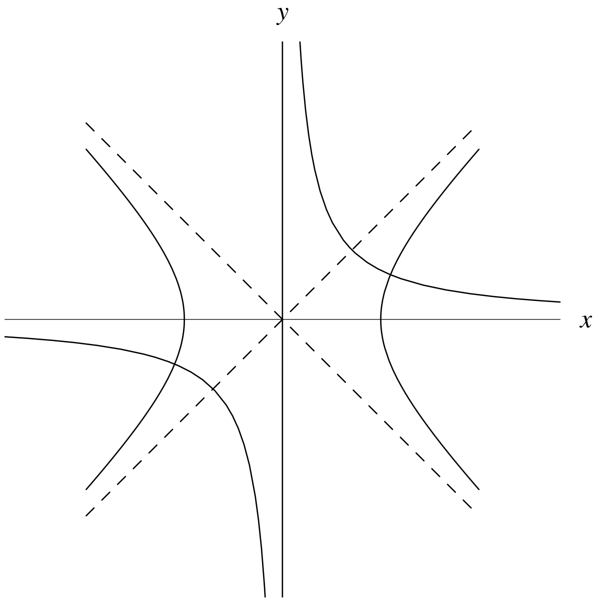

図 A.8　反比例のグラフ双曲線 $y = \dfrac{c}{x}$ と直角双曲線 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2c}}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{\sqrt{2c}}\right)^2 = 1$

双曲線関数と双曲線の媒介変数表示

$$\begin{cases} \cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ \sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$$

と定義し，**双曲線関数**と総称する。($\cosh, \sinh$[2]の記号の起源はラテン語だが，日本語では英語に倣ってハイパボリックコサイン，ハイパボリックサインなどと読むことが多い。)

$$(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$$

が成り立つので，

$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases}$$

は直角双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の媒介変数表示を与える。単位円と一般の楕円の関係と同様，一般の双曲線 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ は直角双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を x 方向に a 倍，y 方向に b 倍したものなので

$$\begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}$$

がその媒介変数表示を与える。

双曲線の標準形の平行移動　標準形の方程式

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

で表される双曲線を x 方向に α，y 方向に β 平行移動した図形の方程式は，(いつものように点 (x, y) を x 方向に $-\alpha$，y 方向に $-\beta$ 平行移動して戻した $(x-\alpha, y-\beta)$ が元の図形上にあるための条件だから)

$$\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2 = 1$$

である。これを展開すると

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2\alpha x + 2a^2\beta y + b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0$$

となる。つまり

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ \ (\text{ただし } A > 0 > C \text{ とする}) \tag{3}$$

の形の式になる。逆に (4) の形の式が与えられれば，所謂「平方完成」により

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

[2]**注意！** $\cosh x$ は $\cosh(x)$ であって，$\cos(hx)$ ではない。この様な解違いをする人がしばしばいる。

と変形できる。$K = \dfrac{D^2}{4A} + \dfrac{E^2}{4C} - F$ と置けば，$K = 0$ のときは一点 $x = -\dfrac{D}{2A}, y = -\dfrac{E}{2C}$ となる。$K > 0$ のときは両辺を K で割ることにより

$$\left(\frac{x + \dfrac{D}{2A}}{\sqrt{\dfrac{K}{A}}} \right)^2 - \left(\frac{y + \dfrac{E}{2C}}{\sqrt{\dfrac{K}{-C}}} \right)^2 = 1$$

とできる。これは標準形の方程式の表す双曲線の平行移動になっている。$K < 0$ のときも，両辺を K で割ることにより

$$-\left(\frac{x + \dfrac{D}{2A}}{\sqrt{\dfrac{-K}{A}}} \right)^2 + \left(\frac{y + \dfrac{E}{2C}}{\sqrt{\dfrac{-K}{-C}}} \right)^2 = 1$$

とできる。これは上に述べた標準形の x と y の立場を入れ換えたものになっており，y 軸上に焦点がある双曲線である。

例 A.3 $x^2 - 2y^2 - 4y = 10$ はどのような図形を表すか？また，その概形を描け。

$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 - 4y = 10 &\Leftrightarrow x^2 - 2(y+1)^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{y+1}{2} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

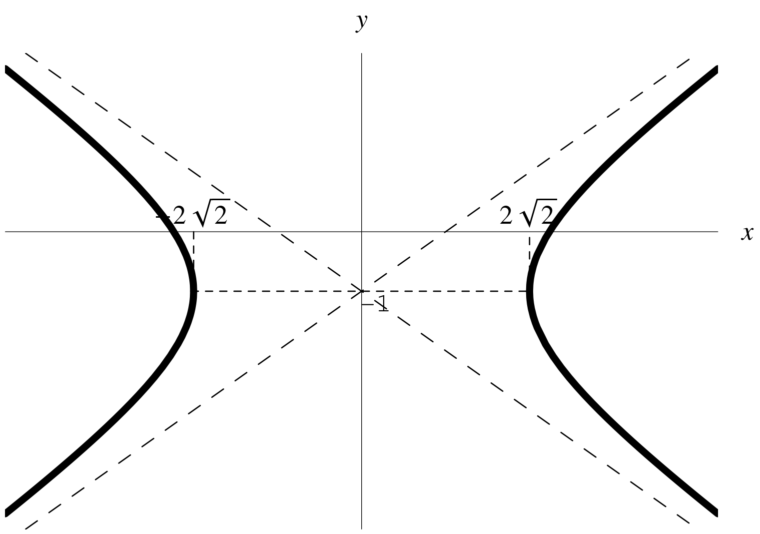

図 A.9 $\left(\dfrac{x}{2\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\dfrac{y+1}{2} \right)^2 = 1$

演習問題 A.5　与えられた双曲線の漸近線の方程式を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{4} = 1$　　(2) $x^2 - 4y^2 = 4$

(3) $-\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$　　(4) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

(5) $x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1$　　(6) $9x^2 - 4y^2 = 1$

(7) $9x^2 - 16y^2 + 18x + 64y - 199 = 0$　　(8) $x^2 - y^2 + 4y + 5 = 0$

A.3　放物線

放物線の幾何学的定義　直線とその直線上にない定点からの距離が等しい点の軌跡を**放物線**という。もう少し詳しく言えば，直線 l とその直線上にない定点 F に対し，点 P と l の距離と点 P と点 F の距離が等しい，という条件を考える。このような条件を満たす点 P 全体の集合が放物線である。このとき，直線 l をこの放物線の**準線**，点 F をこの放物線の**焦点**という。

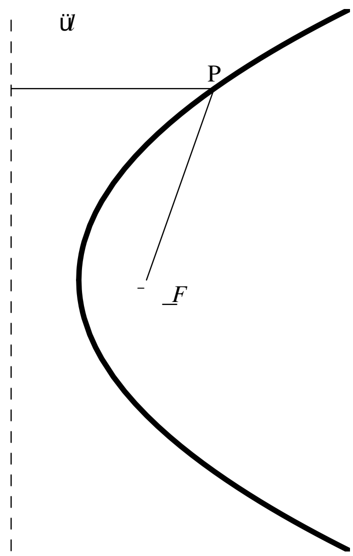

図 A.10　放物線の幾何学的定義

2 次関数のグラフと放物線　準線の方程式が $y = -p$，焦点の座標が $(0, p)$ となるように座標を設定すれば，(いつでもこのように座標を設定することが出来ることはよく考えれば分かる) 点 (x, y) と準線 $y = -p$ の距離は $|y + p|$，点 (x, y) と焦点 $(0, p)$ の距離は $\sqrt{x^2 + (y - p)^2}$ であるからこれらが等しいための条件は

$$\begin{aligned}
|y + p| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2} &\iff (y + p)^2 = x^2 + (y - p)^2 \\
&\iff (y + p)^2 - (y - p)^2 = x^2 \\
&\iff 4py = x^2 \\
&\iff y = \frac{1}{4p} x^2
\end{aligned}$$

である。すなわち放物線は 2 次関数のグラフになっている。

放物線と等加速度運動　質量 m の物体が一定の重力 $\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ を受けて運動するときの Newton の運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

である。成分毎に書けば

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg \end{cases}$$

であり，両辺を m で割れば

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \text{となる実数の定数 } x_0, y_0, v_1, v_2 \text{ が存在する}$$

となる。ここで (x_0, y_0) は $t = 0$ における位置，$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ は $t = 0$ に送る速度である。従って，点 (x_0, y_0) から初速度 $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ で放たれた物体の運動の軌跡は，t を 0 以上の実数全体にわたって動かすときの点 $(x, y) = (x_0 + v_1 t, y_0 + v_2 t - \frac{1}{2}gt^2)$ 全体のなす集合である。より正確に言えば

$$\left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \text{を満たす実数 } t \geqq 0 \text{ が存在する} \right\}$$

である。これがどのような図形か調べよう。$v_1 = 0$ のときは上下運動のみである。$v_1 < 0$ のときは x 軸の負の方向の運動なのでここでは，$v_1 > 0$ の場合にみ調べる。$v_1 < 0$ のときも方向は逆だが同様である。

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + \dfrac{v_2^2}{2g} - \dfrac{1}{2}g\left(t - \dfrac{v_2}{g}\right)^2 \end{cases} \text{を満たす実数 } t \geqq 0 \text{ が存在する} \\ \iff & \begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{v_1} \\ y = y_0 + \dfrac{v_2^2}{2g} - \dfrac{1}{2}g\left(t - \dfrac{v_2}{g}\right)^2 \end{cases} \text{を満たす実数 } t \geqq 0 \text{ が存在する} \\ \iff & y = y_0 + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{v_1} - \frac{v_2}{g}\right)^2, \ x \geqq x_0 \end{aligned}$$

これは，点 $\left(x_0 + \dfrac{v_1 v_2}{g}, y_0 + \dfrac{v_2^2}{2g}\right)$ を頂点とする 2 次関数のグラフの $x \geqq x_0$ なる部分であり「放物線」の一部である。

以上が放物線が日本語で「放物線」と呼ばれる理由である[1]。

演習問題 A.6　直線 $y = b$ と点 (α, β) からの距離が等しいような点 (x, y) の満たすべき条件を求めよ。これを用いて以下の放物線の準線の方程式と焦点の座標を求めよ。

(1) $y = -\dfrac{1}{12}x^2$　　(2) $y = x^2 - 4x + 8$

A.4　統一的視点—2 次曲線あるいは円錐曲線

2 次曲線の定義　一般に (x, y の 2 次式) = 0 即ち

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ \ (\text{ただし } (A, B, C) \neq (0, 0, 0)) \tag{1}$$

の形の方程式で定義される図形を **2 次曲線**という。(ただし，2 つの 1 次式の積に因数分解されてしまうような場合は，2 つの直線の和集合になるので 2 次曲線とは言わないのが普通である。)

2 次曲線の分類　楕円・双曲線・放物線の方程式はいずれも x, y の 2 次式なので，楕円・双曲線・放物線はいずれも 2 次曲線ということになる。実はこの逆も成り立ち，任意の 2 次曲線は楕円・双曲線・放物線のうちのいずれかであることが証明できる。より正確に言えば，与えられた (1) の形の方程式に対して，これが 1 次式の積に因数分解されないという条件の下で，平行移動と回転移動をすることによって，楕円・双曲線・放物線のうちのいずれかの標準形に変換される。

$$\boxed{\text{2 次曲線＝楕円・双曲線・放物線}}$$

円錐曲線　2 次曲線はまた**円錐曲線**とも呼ばれる。これは，円錐の平面による切り口として出てくる図形の全体が，ちょうど 2 次曲線の全体 (ただしこの場合は 2 直線の和集合になっている場合を含む) になっているからである。

離心率　放物線の幾何学的定義は,「直線とその直線上にない定点からの距離が等しい点の軌跡」というものであり，このとき直線を準線，定点を焦点と呼ぶのであった。この定義を「準線からの距離と焦点からの距離の比が 1 : 1 であるような点の軌跡」と言い換えることにより，これを一般化して「準線からの距離と焦点からの距離の比が $1 : e$ であるような点の軌跡」を考えよう。

準線を y 軸とし，焦点の座標を $(\alpha, 0)\,(\alpha > 0)$ とすれば，点 (x, y) と準線との距離は $|x|$，点

[1] 因みにパラボラ (parabola) という言葉はギリシャ語由来で 2000 年以上前から放物線を意味するが，物を投げるという意味はない。物を投げたときの運動がパラボラであることが確立されたのはずっと後のことである。

(x,y) と焦点との距離は $\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}$ であるから条件は

$$
\begin{aligned}
e|x| = \sqrt{(x-\alpha)^2+y^2} &\iff e^2x^2 = (x-\alpha)^2+y^2 \qquad (2)\\
&\iff (e^2-1)x^2 - y^2 + 2\alpha x - \alpha^2 = 0\\
&\iff \begin{cases} -y^2+2\alpha x-\alpha^2=0 & (e=1\ \text{のとき})\\ (e^2-1)\left(x+\dfrac{\alpha}{e^2-1}\right)^2 - y^2 - \dfrac{e^2\alpha^2}{e^2-1} = 0 & (e\neq 1\ \text{のとき}) \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \left(\dfrac{x+\dfrac{\alpha}{e^2-1}}{\dfrac{e\alpha}{1-e^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\dfrac{e\alpha}{\sqrt{1-e^2}}}\right)^2 = 1 & (0<e<1\ \text{のとき})\\ x = \dfrac{1}{2\alpha}y^2+\dfrac{\alpha}{2} & (e=1\ \text{のとき})\\ \left(\dfrac{x+\dfrac{\alpha}{e^2-1}}{\dfrac{e\alpha}{e^2-1}}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{\dfrac{e\alpha}{\sqrt{e^2-1}}}\right)^2 = 1 & (e>1\ \text{のとき}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

となって

$$\boxed{0<e<1\ \text{のときは楕円，}\ e=1\ \text{のときは放物線，}\ e>1\ \text{のときは双曲線}}$$

になっていることが分かる。この e を 2 次曲線の**離心率**という。$0<e<1$ のとき，上の

$$\left(\frac{x+\dfrac{\alpha}{e^2-1}}{\dfrac{e\alpha}{1-e^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\dfrac{e\alpha}{\sqrt{1-e^2}}}\right)^2 = 1$$

は

$$\left(\frac{x}{\dfrac{e\alpha}{1-e^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\dfrac{e\alpha}{\sqrt{1-e^2}}}\right)^2 = 1$$

を平行移動したものだから，楕円 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$ の離心率 e は

$$\begin{cases} a = \dfrac{e\alpha}{1-e^2}\\ b = \dfrac{e\alpha}{\sqrt{1-e^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{e\alpha}{1-e^2}\\ b = a\sqrt{1-e^2} \end{cases}$$

から $e = \sqrt{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$ として求められる。

演習問題 A.7　双曲線 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2-\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$ の離心率 e を a,b を用いて表せ。

演習問題 A.8　離心率が同じ 2 つの 2 次曲線は，互いに相似であることを証明せよ。