数学序論要綱 #B　　　　河野

B　数列および関数の極限

B.1　数列の極限

各自然数 n に対し，数 a_n が定められているとき $\{a_n\}$ を**無限数列**という (以下単に**数列**という)。$n \to \infty$ のとき a_n がある一定の値 α に近づくとき，数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**といい，α をその**極限値**という。

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

あるいは

$$a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

と書く。$\{a_n\}$ が収束しないとき，**発散する**という。発散するとき，$n \to \infty$ のときの a_n の挙動は様々であるが，特に $a_n \to \infty$ あるいは $a_n \to -\infty$ のとなるとき，$\pm\infty$ は数ではないが，便宜的に

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$$

と書く。

定理 B.1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β は有限値) のとき

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (ka_n) = k\alpha$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = \alpha\, \beta$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ 　(ただし $\beta \neq 0$ とする。)

が成立する。

(1)〜(4) は直感的には明らかであろうが，たとえば (3) は次のことよりわかる。

$$\begin{aligned}\alpha\beta - a_n b_n &= (\alpha\beta - a_n\beta) + (a_n\beta - a_n b_n)\\ &= (\alpha - a_n)\beta + a_n(\beta - b_n)\end{aligned}$$

ここで $\{a_n\}$ は収束すると仮定したので，$|a_n|$ は有界，すなわちある定数 $K > 0$ より小さい ($|a_n| < K$)。よって $n \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned}&|(\alpha - a_n)\beta| = |\alpha - a_n| \cdot |\beta| \to 0 &&(\because |\alpha - a_n| \to 0)\\ &|a_n(\beta - b_n)| \leqq K|\beta - b_n| \to 0 &&(\because |\beta - b_n| \to 0)\end{aligned}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

よって $a_n b_n \to \alpha\beta$ $(n \to \infty)$。

この定理により，数列の各項がいくつかの代数的結合 (和・差・積・商) で表されるときは，その各々の極限値がわかれば容易にその極限値はもとまる。しかし (4) において，$a_n, b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となる場合や，a_n, b_n が $\pm\infty$ に発散する場合は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ は形式的には $\dfrac{0}{-}$ や $\dfrac{\infty}{\infty}$ となり，値が定まらない。このような場合を**不定形**という。微積分においては不定形の極限が大事なことが多い。

例 B.2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2}$ をもとめよ。

分子，分母は $n \to \infty$ のとき ∞ になるが，それらの比自体は有限値に収束することがありうる。この場合も n が十分大きければ，$n+2$ と n の比はほぼ 1，同様に $\sqrt{n^2+1}$ と $\sqrt{n^2} = n$ の比も同様，したがって $\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} \fallingdotseq 1$，$\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} \to 1$ となることが予想される。実際

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2} = \frac{\sqrt{n^2+1} \times \dfrac{1}{n}}{(n+2) \times \dfrac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{1+\dfrac{2}{n}} \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2} = 1$$

である。

演習問題 B.1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n+1}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n+2}$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n-1}$

これらの例では分子・分母の増大度を比較的容易にくらべることができた。しかし一般には単純でない。

例 B.3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!} = 0$ $(a > 0)$ を示せ。

$0 < a \leqq 1$ のときは明らか。$a > 1$ の場合：任意に $N > a$ となる自然数 N を固定すると，$n > N$ のとき $\dfrac{a}{k} < \dfrac{a}{N}$ $(k = N+1, \ldots, n)$ だから

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N-1}\frac{a}{N}\cdots\frac{a}{n} \\ &< \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N-1}\underbrace{\frac{a}{N}\frac{a}{N}\cdots\frac{a}{N}}_{n-N+1\text{ 個}} = \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N-1}\left(\frac{a}{N}\right)^{n-N+1}\end{aligned}$$

という不等式が成立する。$\dfrac{a}{N} < 1$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{N}\right)^{n-N+1} = 0$，よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

例 B.3 より a^n $(a > 1)$ の増大度より，$n!$ の増大度の方がさらに大きいことがわかる。

演習問題 B.2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$ を示せ。

(ヒント) $a_n = \dfrac{n^3}{2^n}$ とする。n を十分大きくすれば $\dfrac{1}{2} < r < 1$ となる適当な r を選んで $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r$ とできる。

$\dfrac{\infty}{\infty}$ や $\dfrac{0}{0}$ の形の津提携のある程度一般的な計算法は微分法の応用として学ぶ (ロピタルの定理)。その他の不定形の極限としては $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ のように $\infty-\infty$ の形などもある。

例 B.4 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\frac{1}{2}$

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}\to\frac{1}{2}$$

(注，$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形に変形してもとめた)

演習問題 B.3　次をもとめよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^2-2n\right)$

ここで指数関数の定義および微分において重要な次の極限を考える。

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

とすると $\{\,a_n\,\}$ は収束する。その極限値を e と定める。このことは「単調増加数列 $\{\,a_n\,\}$ の各項がすべてある定数 K より小であるならば数列は収束する」という定理から導かれるがくわしい証明は省く。

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

e は無理数であり，

$$e=2.7182818\cdots$$

と少数展開される。また e は

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

と無限級数で表されることを学ぶであろう。

注：無限級数

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

は部分和，$S_0=1, S_1=1+\dfrac{1}{1!}, S_2=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!},\ldots,S_n=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!},\ldots$ で定まる数列 $\{\,S_n\,\}$ の極限値を意味する。

演習問題 B.4　電卓等を使って S_0 から S_{10} 程度まで計算し，S_n がしだいに e に近づくことをたしかめよ。また $a_{100}=\left(1+\dfrac{1}{100}\right)^{100}$ の値と比較せよ。

例 B.5 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\to e\cdot 1=1\quad(n\to\infty)$$

演習問題 B.5　次をもとめよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

B.2　関数の極限

変数 x が a に (a と異なる値をとりながら) 近づくとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に近づくとき

$$\lim_{n\to a}f(x)=A$$

と書き，$x\to a$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という。また A を $x\to a$ としたときの $f(x)$ の**極限値**という。

例 B.6 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2+3)=4$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin x=0$

$x\to a$ のとき $f(x)$ の値が $\pm\infty$ となるとき $\pm\infty$ は数ではないが

$$\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$$

と書くのは数列の場合と同様である。数列の場合と同様に次の定理が成立する。

定理 B.7 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=A,\ \lim_{x\to a}g(x)=B$ とする (A,B は有限値)。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\Big(kf(x)\Big)=kA$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\Big(f(x)\pm g(x)\Big)=A\pm B$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)g(x)=AB$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$　(ただし $B\neq 0$ とする)

証明は数列の場合と同様である。各自こころみよ。また定義より次のことも明らかであろう。

定理 B.8 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=A$ とする。数列 $\{a_n\}$ が $a_n\neq a$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(a_n)=A$

$x\to a$ のときの $f(x)$ の極限値と $x=a$ における $f(x)$ の値が一致するとき，すなわち

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

となるとき $f(x)$ は $x=a$ で**連続**という。すべての点で連続のとき $f(x)$ を**連続関数**という。

演習問題 B.6

(1) 次の関数は連続か

(1) $f(x) = |x|$ (2) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

(2) 不連続な関数の例をあげよ。

$x \to a$ のとき $f(x), g(x) \to 0$ あるいは $f(x), g(x) \to \pm\infty$ となる場合 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ を考えよう。数列の場合と同様に形式的には $\dfrac{0}{0}$ あるいは $\dfrac{\infty}{\infty}$ で不定であるが，有限値に収束している場合もある。

例 B.9 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+1) = 2$

ここで三角関数と指数関数の微分の基礎となる 2 つの極限値をもとめよう。

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{変数 } x \text{ はラジアンとする}) \tag{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \tag{3}$$

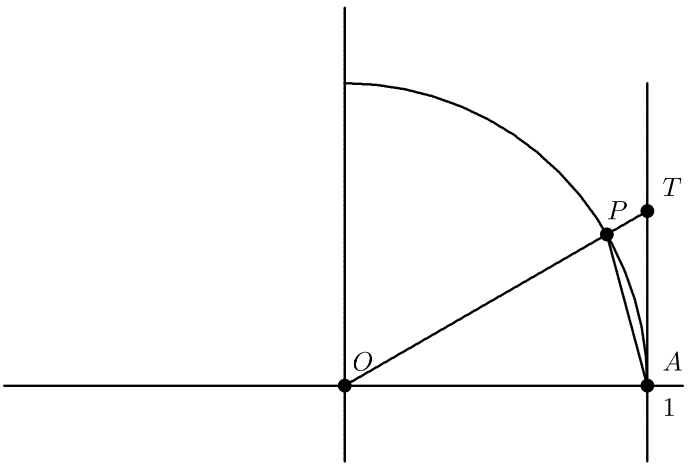

図 B.1

(??) **の証明：** 図 ??より

$$\triangle OPA \text{ の面積} < \text{扇形 } OPA \text{ の面積} < \triangle OTA \text{ の面積}$$

である。それぞれの面積を計算すると

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\tan x$$

これより分母の 2 をはらい，逆数をとれば

$$\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

よって

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$x \to 0$ のとき $\cos x \to 1$ だから (**??**) がわかる。

演習問題 B.7　(**??**) より次を示せ。

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

(**??**) **の証明：**　3 段階にわけて考える。

第 1 段階：$\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$ である。

$t \to \infty$ の場合；$n \leqq t < n+1$ となる自然数 n をとる，$\displaystyle 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{t} \leqq 1+\frac{1}{n}$ より

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{t}\right)^t < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

となる。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) \to e \qquad (n\to\infty)$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} \to e \qquad (n\to\infty)$$

だから $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$

$t \to -\infty$ の場合；$u = -t$ とおく。$(u \to +\infty)$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \left(1-\frac{1}{u}\right)^{-u} &= \left(\frac{u-1}{u}\right)^{-u} = \left(1+\frac{1}{u-1}\right)^u \\ &= \left(1+\frac{1}{u-1}\right)^{u-1}\left(1+\frac{1}{u-1}\right) \to e \qquad (u\to\infty)\end{aligned}$$

第 2 段階：$\displaystyle\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{n}} = e$ である。$u = \dfrac{1}{t}$ とおけば第 1 段階よりわかる。

第 3 段階：$x = \log(1+u)$ とおくと $u = e^x - 1$ より

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{u}{\log(1+u)} = \frac{1}{\log(1+u)^{\frac{1}{u}}} \to \log e = 1$$