数学序論問題解説 #2

河野

演習問題 1.5　次において P は Q の「必要十分条件，必要条件ではあるが十分条件ではない，十分条件ではあるが必要条件ではない，必要条件でも十分条件でもない」のいずれかであるか決定せよ。ここで x, y は実数とする。
(1) $P : x^2 = 1,\quad Q : x = 1$
(2) $P : xy > 0,\quad Q : x > 0$ かつ $y > 0$
(3) $P : xy > 0,\quad Q : x > 0$ または $y > 0$
(4) $P : xy = 0,\quad Q : x = 0$ かつ $y = 0$
(5) $P : xy = 0,\quad Q : x = 0$ または $y = 0$
(6) $P : xy = 0$ かつ $y = x + 1,\quad Q : x = 0$ かつ $y = 1$
(7) $P : x^2 + 2x - 1 = 0$ かつ $x > 0,\quad Q : x = -1 + \sqrt{2}$

(1)　$Q \Longrightarrow P$ は正しい。$P \Longrightarrow Q$ は $x = -1$ という反例があるので正しくない。よって P は Q であるための必要条件である。
(2)　$Q \Longrightarrow P$ は正しい。$P \Longrightarrow Q$ は $x = -1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。よって P は Q であるための必要条件である。
(3)　$P \Longrightarrow Q$ は $x = -1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。$Q \Longrightarrow P$ は $x = 1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。よって P は必要条件でも十分条件でもない。
(4)　$Q \Longrightarrow P$ は正しい。$P \Longrightarrow Q$ は $x = 0$ かつ $y = 1$ という反例があるので正しくない。よって P は必要条件である。
(5)　積の性質から P は Q の必要十分条件である。
(6)　$Q \Longrightarrow P$ は正しい。$P \Longrightarrow Q$ は $x = -1$ かつ $y = 0$ という反例があるので正しくない。よって P は必要条件である。
(7)　$-1+\sqrt{2} > 0$ かつ $(-1+\sqrt{2})^2+2(-1+\sqrt{2})-1 = 0$ なので $Q \Longrightarrow P$ は正しい。$x^2+2x-1 = 0$ の必要十分条件は $x = -1 + \sqrt{2}$ または $x = -1 - \sqrt{2}$ である。このなかで正の数は $-1 + \sqrt{2}$ のみである。よって $P \Longrightarrow Q$ は正しい。P は必要十分条件である。

演習問題 1.6　次の連立方程式の解を求めよ。
(1) $x(x^2 + y^2) = 0$ かつ $y(x^2 + y^2 - 1) = 0$
(2) $x^3 - x + y = 0$ かつ $y^3 + x - y = 0$
(3) $(y - 2x^2y)2^{-x^2-y^2} = 0$ かつ $(x - 2xy^2)2^{-x^2-y^2} = 0$

(1)　$x(x^2 + y^2) = 0$ である必要十分条件は $x = 0$ または $x^2 + y^2 = 0$ である。$x^2 + y^2 = 0$ である必要十分条件は $(x, y) = (0, 0)$ である。よって $x(x^2 + y^2) = 0$ である必要十分条件は $x = 0$ または $(x, y) = (0, 0)$ であるが，これは $x = 0$ と同値である。
　$\vee$, $\Longleftrightarrow$ 等の記号を用いた方が分かりやすいかもしれないので，上のことを記号を用いて書いておく。

$$
\begin{aligned}
x(x^2 + y^2) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x = 0) \vee (x^2 + y^2) = 0 \\
x^2 + y^2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x, y) = (0, 0)
\end{aligned}
$$

なので

$$(x=0)\vee(x^2+y^2)=0 \iff (x=0)\vee(x,y)=(0,0) \iff x=0$$

となる。

よって与えられた連立方程式は連立方程式 $x=0$ かつ $y(x^2+y^2-1)=0$ と同値である。$x=0$ を 2 番目の式に代入すると $y(y^2-1)=0$ となり，$y=0$ または $y=1$ または $y=-1$ となる。よって求める解は $(x,y)=(0,0)$ または $(x,y)=(0,1)$ または $(x,y)=(0,-1)$ である。

(2) $x^3-x+y=0$ を 1 式，$y^3+x-y=0$ を 2 式とする。1 式と 2 式を加えると $x^3+y^3=0$ を得る。$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=0$ なので

$$x^3+y^3=0 \iff x+y=0 \text{ または } x^2-xy+y^2=0$$

が成立している。

$$x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2$$

なので

$$x^2-xy+y^2=0 \iff x-\frac{1}{2}y=0 \text{ かつ } y=0 \iff x=0 \text{ かつ } y=0$$

となる。よって

$$x+y=0 \text{ または } x^2-xy+y^2=0 \iff x+y=0 \text{ または } (x,y)=(0,0) \iff x+y=0$$

が成立するので

$$x^3+y^3=0 \iff x+y=0$$

が分かる。この式を 3 式とすると

$$1 \text{ 式かつ } 2 \text{ 式} \iff 1 \text{ 式かつ } 3 \text{ 式}$$

が成立するので，1 式と 3 式からなる連立方程式を解けばよいことが分かる。3 式を 1 式に代入することにより $x^3-2=0$ が得られる。$x^3-2x=x(x^2-2)=x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$ なので $x=0,\sqrt{2},-\sqrt{2}$ となる。よって解は $(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ である。

(3) 指数関数は 0 になることはないので連立方程式は $y-2x^2y=0$ (1 式) かつ $x-2xy^2=0$ (2 式) と考えることができる。

$$\begin{aligned} y-2x^2y=y(1-2x^2)=0 &\iff y=0 \text{ または } 1-2x^2=0 \\ x-2xy^2=x(1-2y^2)=0 &\iff x=0 \text{ または } 1-2y^2=0 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 1 \text{ 式かつ } 2 \text{ 式} \iff\ &(1)\ x=0 \text{ かつ } y=0\text{，または} \\ &(2)\ x=0 \text{ かつ } 1-2x^2=0\text{，または} \\ &(3)\ 1-2y^2=0 \text{ かつ } y=0\text{，または} \\ &(4)\ 1-2y^2=0 \text{ かつ } 1-2x^2=0 \end{aligned}$$

が成立する。(1) のときは $(x,y)=(0,0)$ になる。(2) のときは $x=0$ を $1-2x^2=0$ を代入すると $1=0$ が成立する。これは矛盾なのでこのとき解は存在しない。(3) のとき $y=0$ を $1-$

$2y^2=0$ を代入すると $1=0$ が成立する。これは矛盾なのでこのとき解は存在しない。(4) のときは $1-2x^2=0$ より $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$1-2y^2=0$ より $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。以上により $(x,y)=(0,0),\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を得る。

演習問題 1.7　次の命題の真偽を判定せよ。

(1) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $x^2\geqq 0$
(2) 任意の $x\in\mathbb{C}$ に対し $x^2\geqq 0$
(3) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $x^4-x^2+\dfrac{1}{4}\geqq 0$
(4) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $x^4-x^2+\dfrac{1}{5}\geqq 0$
(5) $x\in\mathbb{R}$ が存在して $x^4-x^2+\dfrac{1}{5}\leqq 0$
(6) $x\in\mathbb{R}$ が存在して $x-2x^2>0$ かつ $x<0$

演習問題 1.8 の解答の後で真偽を考えることにする。

演習問題 1.8　演習問題 1.7 の命題の否定命題をつくれ。

(1) $x\in\mathbb{R}$ が存在して $x^2<0$
(2) $x\in\mathbb{C}$ が存在して $x^2<0$
(3) $x\in\mathbb{R}$ が存在して $x^4-x^2+\dfrac{1}{4}<0$
(4) $x\in\mathbb{R}$ が存在して $x^4-x^2+\dfrac{1}{5}<0$
(5) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $x^4-x^2+\dfrac{1}{5}>0$
(6) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $x-2x^2\leqq 0$ または $x\geqq 0$

(1)　任意の実数に対し $x^2\geqq 0$ が成立するので 1.7 (1) は正しい。
(2)　複素数 i は $i^2=-1<0$ なので 1.8 (2) は正しい。よって 1.7 (2) は偽である。
(3)　$x^4-x^2+\dfrac{1}{4}=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2\geqq 0$ なので 1.7 (3) は正しい。
(4)　$x^4-x^2+\dfrac{1}{5}=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{20}$ が成立する。$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とすると，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^4-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{1}{5}=-\dfrac{1}{20}<0$ となるので 1.8 (4) は正しい。よって 1.7 (4) は偽である。
(5)　(4) の例は (5) の例にもなっているので，1.7 (5) は正しい。
(6)　$x-2x^2=x(1-2x)>0\Longleftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{2}$ なので $x-2x^2>0$ かつ $x<0$ となる実数 x は存在しない。よって 1.7 (6) は偽である。

演習問題 1.9　次のベクトルの組が $\mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ を生成するかどうか調べよ。

(1) $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　(4) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

講義では省略したが，解説は省略せずにしておこう。青で書かれている部分は解析部分であり，解答には必ずしも書かなくてもよい。

(1) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が a_1, a_2 を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されているとする。このとき $x = a_1 + 2a_2$ かつ $y = 2a_1 + a_2$ が成立しているので，

$$a_1 = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x, \quad a_2 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y$$

となる。

$\mathbb{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対しそれを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく。この x, y に対し

$$a_1 = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x, \quad a_2 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y$$

と置くと

$$\begin{aligned} a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 &= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x \\ \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

となる。よって $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成する。

(2) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が a_1, a_2 を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

と表されているとする。このとき $x = 2a_1 + 4a_2$ かつ $y = 3a_1 + 6a_2$ が成立しているので，$3x = 2y$ が成立する。このことは $3x = 2y$ を満たさない x, y は上の様な形で表せないことを意味している。例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は上の様に表されないと思われる。

背理法で証明する。$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を生成すると仮定する。任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は a_1, a_2 を用いて

$$\boldsymbol{x} = a_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

と書ける。よって $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対しても実数 a_1，a_2 が存在して

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

と書ける。このとき

$$1 = 2a_1 + 4a_2, \quad 1 = 3a_1 + 6a_2$$

が成立している。このとき

$$3 = 3(2a_1 + 4a_2) = 2(3a_1 + 6a_2) = 2$$

となり矛盾。よって $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成しない。

(3) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が a_1，a_2，a_3 を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されているとする。このとき $x = a_1 + a_3$, $y = a_1 + a_2 + a_3$, $z = a_2 + a_3$ が成立しているので,

$$a_1 = y - z, \quad a_2 = y - x, \quad a_3 = x - y + z$$

となる。

$\mathbb{R}^3$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対しそれを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく。この x, y, z に対し

$$a_1 = y - z, \quad a_2 = y - x, \quad a_3 = x - y + z$$

と置くと

$$\begin{aligned} a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 &= a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (y - z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y - x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - y + z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y - z \\ y - z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y - x \\ y - x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - y + z \\ x - y + z \\ x - y + z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$$

となる。よって $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ は $\mathbb{R}^3$ を生成する。

(4) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が a_1, a_2, a_3 を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と表されているとする。このとき $x = a_1 + a_2 + a_3$, $y = a_1 + 2a_2 + 3a_3$, $z = a_1 + 3a_2 + 5a_3$ が成立している。$y - x = a_2 + 2a_3$ かつ $z - y = a_2 + 2a_3$ より $y - x = z - y$ が成立する。このことは $y - x = z - y$ を満たさない x, y, z は上の様な形で表せないことを意味している。例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 0$ は上の様に表されないと思われる。

背理法で証明する。$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ が $\mathbb{R}^3$ を生成すると仮定する。任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は a_1, a_2, a_3 を用いて

$$\boldsymbol{x} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} 3 + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と書ける。よって $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対しても実数 a_1, a_2, a_3 が存在して

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と書ける。このとき

$$1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad 0 = a_1 + 2a_2 + 3a_3, \quad 0 = a_1 + 3a_2 + 5a_3$$

が成立している。このとき

$$\begin{aligned} 0 - 1 &= (a_1 + 2a_2 + 3a_3) - (a_1 + a_2 + a_3) = a_2 + 2a_3 \\ 0 - 0 &= (a_1 + 3a_2 + 5a_3) - (a_1 + 2a_2 + 3a_3) = a_2 + 2a_3 \end{aligned}$$

より $-1 = 0$ となり矛盾。よって $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ は $\mathbb{R}^3$ を生成しない。