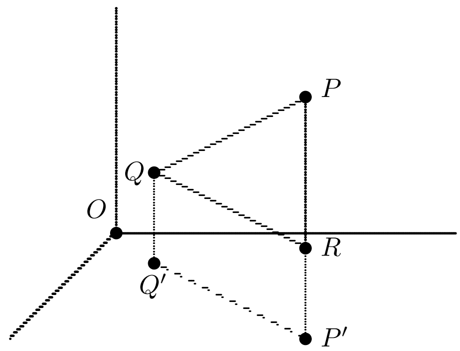
数学序論問題解説 #5

河野

演習問題 3.1　上の公式 (2) が何故成り立つか考えよ。(ヒント：例えば，点 (x_1, y_1, z_1) から xy 平面に垂線を下ろしてみよ。)



P の座標を (x_0, y_0, z_0)，Q の座標を (x_1, y_1, z_1) とする。P，Q から xy 平面に下ろした足を P'，Q' とするとその座標はそれぞれ $(x_0, y_0, 0)$，$(x_1, y_1, 0)$ となっている。直線 PP' 上にあり z 座標が z_1 である点を R とする。$\triangle PQR$ は直角三角形なので

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2$$

が成立している。ここで

$$\overline{PR} = |z_0 - z_1|$$

であり，

$$\overline{QR} = \overline{Q'P'} = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

なのでまとめると

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}$$

が成立する。

演習問題 3.2　次の 2 点間の距離を求めよ。

(1) 点 $(1, 3)$ と点 $(5, 6)$	(2) 点 $(1, 2)$ と点 $(4, -3)$	(3) 点 $(1, 3)$ と点 $(3, -4)$
(4) 点 $(-2, -3)$ と点 $(3, -6)$	(5) 点 $(-2, 3)$ と点 $(4, 3)$	(6) 点 $(3, -3)$ と点 $(-5, 3)$
(7) 点 $(-2, -4)$ と点 $(2, 1)$	(8) 点 $(0, 0)$ と点 $(-3, 9)$	(9) 点 $(1, -3)$ と点 $(1, 2)$

この問題に解説は必要ないだろう。答えのみ記す。(1) 5, (2) $\sqrt{34}$, (3) $\sqrt{53}$, (4) $\sqrt{34}$, (5) 6, (7) 10, (8) $\sqrt{41}$, (9) $3\sqrt{10}$, (10) 5

演習問題 3.3

(1) 3 点 $(7,2),(3,0),(0,6)$ を頂点とする三角形はどんな三角形か？

(2) 3 点 $(0,-1),(2,-3),(4,3)$ を頂点とする三角形はどんな三角形か？

(3) 3 点 $(4,8),(-1,3),(3,1)$ を頂点とする三角形は二等辺三角形であることを示せ。

(4) 直線 $y=x$ 上の点で、点 $(1,3)$ と点 $(3,0)$ から等距離にある点の座標を求めよ。

図を描けばどのような状況か予想がつくであろう。あとはその予想を証明すればよい (勿論予想が正しくなければ証明はできないが)。

(1) $(7,2)$, $(0,6)$, $(3,0)$ をそれぞれ点 P,Q,R とする。$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ とすると $\left(\overrightarrow{\mathrm{RP}},\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\right)=-12+12=0$ なので $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RR}}$ となる。よって直角三角形である。

(2) $(4,3)$, $(2,-3)$, $(0,-1)$ をそれぞれ点 P,Q,R とする。$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ とすると $\left(\overrightarrow{\mathrm{RP}},\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\right)=0$ なので $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RR}}$ となる。よって直角三角形である。

(3) $(4,8)$, $(-1,3)$, $(3,1)$ をそれぞれ点 P,Q,R とする。$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{RP}}\right|$ なので二等辺三角形である。

(4) 直線 $y=x$ 上の点を (x,x) とする。2 点間の距離が等しいので

$$\sqrt{(x-1)^2+(x-3)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(x-0)^2}$$

より $2x+1$ を得る。$x=\frac{1}{2}$ なので，求める点は $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。である。

演習問題 3.4

(1) 点 A の座標を $(2,-1)$、点 B の座標を $(4,-2)$ とするとき、線分 AB の中点の座標を求めよ。

(2) 点 A の座標を $(-1,-2)$、点 B の座標を $(8,4)$ とするとき、線分 AB を $2:1$ に内分する点の座標を求めよ。

(3) 点 A の座標を $(1,2)$、点 B の座標を $(4,6)$ とするとき、線分 AB を $2:5$ に内分する点の座標を求めよ。

(4) 点 A の座標を $(2,-1)$、点 B の座標を $(4,-2)$ とするとき、線分 AB を $3:2$ に内分する点の座標を求めよ。

(5) 点 A の座標を $(1,2)$、点 B の座標を $(4,6)$ とするとき、線分 AB を $5:2$ に内分する点の座標を求めよ。

(1) 中点は $1:1$ に内分する点なので

$$\left(\frac{2+4}{2},\frac{-1-2}{2}\right)=\left(3,-\frac{3}{2}\right)$$

(2)

$$\frac{1}{3}(-1,-2)+\frac{2}{3}(8,4)=\left(\frac{-1+16}{3},\frac{-2+8}{3}\right)=(5,2)$$

(3)

$$\left(\frac{5+8}{7},\frac{10+12}{7}\right)=\left(\frac{13}{7},\frac{22}{7}\right)$$

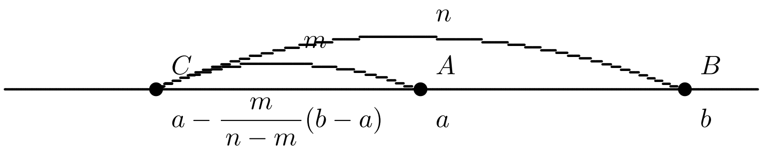
(4)

$$\left(\frac{4+12}{5}, \frac{-2-6}{5}\right) = \left(\frac{16}{5}, \frac{-8}{5}\right)$$

(5)

$$\left(\frac{2+20}{7}, \frac{4+30}{7}\right) = \left(\frac{22}{7}, \frac{34}{7}\right)$$

演習問題 3.5　$m < n$ の場合に，図 3.6 と同様な図を自分で描いて考えてみよ。



演習問題 3.6

(1) 点 A の座標を $(-1,-2)$、点 B の座標を $(8,4)$ とするとき、線分 AB を $2:1$ に外分する点の座標を求めよ。
(2) 点 A の座標を $(2,-1)$、点 B の座標を $(4,-2)$ とするとき、線分 AB を $2:3$ に外分する点の座標を求めよ。
(3) 点 A の座標を $(1,2)$、点 B の座標を $(4,6)$ とするとき、線分 AB を $2:5$ に外分する点の座標を求めよ。
(4) 点 A の座標を $(2,-1)$、点 B の座標を $(4,-2)$ とするとき、線分 AB を $3:2$ に外分する点の座標を求めよ。
(5) 点 A の座標を $(1,2)$、点 B の座標を $(4,6)$ とするとき、線分 AB を $5:2$ に外分する点の座標を求めよ。

(1)

$$\left(\frac{1+16}{2-1}, \frac{2+8}{2-1}\right) = (17, 10)$$

(2)

$$\left(\frac{6-8}{3-2}, \frac{-3+4}{3-2}\right) = (-2, 1)$$

(3)

$$\left(\frac{5-8}{5-2}, \frac{10-12}{5-2}\right) = \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$$

(4)

$$\left(\frac{-4+12}{3-2}, \frac{2-6}{3-2}\right) = (8, -4)$$

(5)

$$\left(\frac{-2+20}{5-2}, \frac{-4+30}{5-2}\right) = \left(6, \frac{26}{3}\right)$$

演習問題 3.7

(1) 点 $(1,2)$ と点 (a,b) の中点の座標が $(2,-1)$ であるとき a,b の値を求めよ。
(2) 点 $(2,3)$ に関して点 $(-4,6)$ と対称な点の座標を求めよ。
(3) 点 $(2,3)$ に関して点 $(5,8)$ と対称な点の座標を求めよ。
(4) 点 $(1,3)$ に関して点 $(-2,5)$ と対称な点の座標を求めよ。

(1) $(1,2)$ と (a,b) を $1:1$ に内分する点が $(2,-1)$ なので

$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right) = (2,-1)$$

が成立する。これを解いて $(a,b)=(3,-4)$ を得る。

(2) 点 $(-4,6)$ と点 $(2,3)$ を結ぶ線分を $1:1$ に外分する点が求める点なので

$$\left(\frac{4+4}{2-1}, \frac{-6+6}{2-1}\right) = (8,0)$$

である。

(3) 前問と同様にできるが，次のように考えてもできる。求める点を (a,b) とすると，$(5,8)$ と (a,b) を $1:1$ に内分する点が $(2,3)$ なので

$$\frac{5+a}{2} = 2, \quad \frac{8+b}{2} = 3$$

より $(a,b)=(-1,-2)$ となる。

(4) 前問または前々問と同様に解くと $(4,1)$ を得る。