数学序論問題解説 #6

河野

演習問題 3.8　次の与えられた点を通り与えられた傾きをもつ直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(-3,4)$，傾き -2　(2) 点 $(-1,3)$，傾き 2　(3) 点 $(2,-1)$，傾き $\dfrac{1}{3}$
(4) 点 $(2,-1)$，傾き -2　(5) 点 $(2,-1)$，傾き 0　(6) 点 $(2,1)$，傾き 3
(7) 点 $(-3,-4)$，傾き -2

(a,b) を通る傾き m である直線の方程式は $y-b=m(x-a)$ である。得られた方程式に点の座標を代入して，等号が成立しない場合は間違っていることが確認できる。

(1)　$y-4=-2(x+3)$ より $y=-2x-2$ を得る。得られた方程式に $x=-3$，$y=4$ を代入すると $4=-2(-3)-2$ で成立している。傾きもこめて考えれば正しいことが確認できる。

(2)　$y-3=2(x+1)$ より $y=2x+5$ を得る。

(3)　$y+1=\dfrac{1}{3}(x-2)$ より $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{3}$ を得る。

(4)　$y+1=-2(x-2)$ より $y=-2x+3$ を得る。

(5)　$y=-1$

(6)　$y-1=3(x-2)$ より $y=3x-5$ を得る。

(7)　$y+4=-2(x+3)$ より $y=-2x-10$ を得る。

演習問題 3.9　次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(1) 2 点 $(-1,1),(2,7)$　(2) 2 点 $(1,4),(1,-1)$　(3) 2 点 $(1,1),(3,5)$
(4) 2 点 $(-2,5),(2,3)$　(5) 2 点 $(3,4),(-6,4)$　(6) 2 点 $(-3,2),(-3,5)$
(7) 2 点 $(-3,0),(2,3)$　(8) 2 点 $(2,1),(-1,7)$　(9) 2 点 $(-1,3),(-1,5)$

(1)　最初は傾きを求めて，1 点と傾きから方程式を決める方法で解く。2 点を $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ とすると，傾き m は

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

である。傾きは $\dfrac{7-1}{2-(-2)}=\dfrac{6}{3}=2$ なので求める方程式は $y=2x+3$ である。

(2)　求める方程式を $y=mx+b$ として点を代入して m,b に関する連立 1 次方程式を解くことで求める。$y=mx+b$ とすると

$$4=m+b,\quad -1=m+b$$

となる。この様な m,b は存在しない。どこがおかしいのだろう。それは始めから直線の方程式が $y=mx+b$ の形をしていると決めてしまったところにある。y 軸と平行な直線はこの形では表すことはできない。もとに戻って 2 点を通る直線を平面に書いてみると y 軸に平行になっている。すなわち $x=a$ という形をしているはずである。よって求める方程式は $x=1$ である。

(3)　仕切り直しで (2) で述べた方法で解いてみる。$y=mx+b$ とすると

$$1=m+b,\quad 5=3m+b$$

となる。右の式から左の式を引くと $4 = 2m$ すなわち $m = 2$ を得る。これを元の式に代入すると $b = -1$ となる。よって求める方程式は $y = 2x - 1$ である。以下答えのみ。

(4) $y = -\frac{1}{2}x + 4$

(5) $y = 4$

(6) $x = -3$

(7) $y = \frac{3}{5}x + \frac{9}{5}$

(8) $y = -2x + 5$

(9) $x = -1$

演習問題 3.10 次の問いに答えよ。

(1) 3 点 $(3, -4), (-2, -3), (p + 3, p)$ が一直線上にあるように p を定めよ。

(2) 直線 $2x + 3y - 1 = 0$ の傾きと y 切片（y 軸との交点の y 座標）を求めよ。

(1) 2 つの方法で解いてみる。最初は 2 点を通る直線の方程式を求める。2 点 $(3, -4)$，$(-2, -3)$ を通る直線の方程式は $y = -\frac{1}{5}x - \frac{17}{5}$ である。これが $(p+3, p)$ を通るので $p = -\frac{1}{5}(p+3) - \frac{17}{5}$ が成立する。これを解いて $p = -\frac{10}{3}$ を得る。

2 点 $(3, -4)$，$(-2, -3)$ を通る直線の傾きと，2 点 $(-2, -3)$，$(p + 3, p)$ を通る直線の傾きが等しいのでその式を立てる。$\frac{-3 - (-4)}{-2 - 3} = \frac{p + 3}{p + 3 + 2}$ が成立するので，これを解いて $p = -\frac{10}{3}$ を得る。

(2) y 軸の方程式はは $x = 0$ なので $2x + 3y - 1 = 0$ と $x = 0$ の連立方程式を解いて $y = \frac{1}{3}$ を得る。これが求める y 切片である。

演習問題 3.11 次の点を通り次の直線に平行な直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(1, 2)$，直線 $y = -2x + 7$

(2) 点 $(3, -2)$，直線 $y = 2x + 1$

(3) 点 $(3, -2)$，直線 $3x + y - 2 = 0$

(4) 点 $(2, 1)$，直線 $2x + 3y = 4$

(5) 点 $(-3, 2)$，直線 $4x - 3y + 2 = 0$

$y = mx + b$ の形に表されているとき，平行である条件は傾きが等しいことである。

(1) $(1, 2)$ を通り傾き -2 の直線なので求める方程式は $y = -2x + 4$ である。

(2) $y = 2x - 8$

(3) 与えられた直線の方程式は $y = -3x + 2$ となるので傾きは -3 である。よって $y = -3x + 7$ である。

(4) 傾きは $-\frac{2}{3}$ なので求める方程式は $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ である。

(5) 傾きは $\frac{4}{3}$ なので求める方程式は $y = \frac{4}{3}x + 6$ である。

演習問題 3.12 何故上の (2) が成立するか，次の図 3.8 を見て考えてみよ。

直線 $y = ax + b$ と直線 $y = cx + d$ が直交しているとき図 3.8 のような状況になっている。即ち直線 $y = cx + d$ 上の点を x 方向に a 移動したとき再び直線 $y = cx + d$ 上にあるためには y 方向

にさらに -1 移動する必要がある。よって傾き c は $c=\dfrac{-1}{a}$ であり $ac=-1$ となっている。逆に $ac=-1$ のときは図 3.8 より直交していることが分かる。

演習問題 3.13　次の点を通り次の直線に垂直な直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(2,3)$，直線 $y=\dfrac{1}{2}x+1$　　(2) 点 $(1,2)$，直線 $y=-2x$
(3) 点 $(1,2)$，直線 $2x+3y-2=0$　　(4) 点 $(2,1)$，直線 $2x+3y=4$
(5) 点 $(-3,2)$，直線 $4x-3y+2=0$

直線 $y=mx+b$ と $y=m'x+b'$ が垂直である条件は $mm'=-1$ である。

(1)　点 $(2,3)$ を通る傾き -2 の直線を求めればよい。よって $y=-2x+7$ である。

(2)　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

(3)　与えられた直線の傾きは $-\dfrac{2}{3}$ なので $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$

(4)　$y=\dfrac{3}{2}x-2$

(5)　$y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$

演習問題 3.14　次の問に答えよ。

(1) 直線 $y=x+1$ に関して点 $(3,0)$ と対称な点の座標を求めよ。
(2) 直線 $y=2x-3$ に関して点 $(4,1)$ と対称な点の座標を求めよ。
(3) 3 点 $(0,3),(-2,0),(3,0)$ を頂点とする三角形の各頂点からそれぞれの対辺におろした 3 つの垂線が 1 点で交わることを証明せよ。
(4) 3 点 $(-2,2),(2,-1),(2,4)$ を頂点とする三角形の 3 つの辺の垂直二等分線が 1 点で交わることを証明せよ。

(1)　求める点を (a,b) とする。$(3,0)$ と (a,b) を通る直線は $y=x+1$ と直交するので，

$$\frac{b-0}{a-3}=-1$$

が成立する。これより $b=-a+3$ が得られる。$(3,0)$ と (a,b) の中点 $\left(\dfrac{a+3}{2},\dfrac{b+0}{2}\right)$ は直線 $y=x+1$ 上にあるので

$$\frac{b}{2}=\frac{a+3}{2}+1$$

が成立している。これより $b=a+5$ が得られる。これを解いて $a=-1$，$b=4$ を得る。よって求める点は $(-1,4)$ である。

(2)　求める点を (a,b) とする。$(4,1)$ と (a,b) を通る直線は $y=2x-3$ と直交するので，

$$\frac{b-1}{a-4}=-\frac{1}{2}$$

が成立する。これより $a+2b=6$ が得られる。$(4,1)$ と (a,b) の中点 $\left(\dfrac{a+4}{2},\dfrac{b+1}{2}\right)$ は直線 $y=2x-3$ 上にあるので

$$\frac{b+1}{2}=2\frac{a+4}{2}-3$$

が成立している。これより $b=2a+1$ が得られる。これを解いて $a=\frac{4}{5}$，$b=\frac{13}{5}$ を得る。よって求める点は $\left(\frac{4}{5},\frac{13}{5}\right)$ である。

(3) 幾何的に証明することもできるが，ここでは式に基づいて示す。$(0,3)$，$(-2,0)$，$(3,0)$ を A，B，C とする。B から直線 AC に下ろした垂線と A から直線 BC に下ろした垂線の交点 X を求める。直線 CX が直線 AB と直交することを示せばよい。BC は x 軸なので A から BC に下ろした垂線は y 軸である。直線 AC の傾きは -1 なので BX の傾きは 1 である。よって交点 X は $(0,2)$ である。直線 AB の傾きは $\frac{3}{2}$ である。直線 CX の傾き $-\frac{2}{3}$ なので直交していることが分かる。

(4) $(-2,2)$，$(2,-1)$，$(2,4)$ を A，B，C とする。BC の垂直 2 等分線は $y=\frac{3}{2}$ である。AB の垂直 2 等分線は $(0,3)$ を通り傾き $-\frac{1}{2}$ の直線である。よって 2 つの垂直 2 等分線の交点は $\left(\frac{3}{4},frac32\right)$ である。この交点を X とすると

$$\overline{AX}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}+2\right)^2+\left(\frac{3}{2}-2\right)^2}=\frac{5}{4}\sqrt{5}$$

であり

$$\overline{BX}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}-2\right)^2+\left(\frac{3}{2}+1\right)^2}=\frac{5}{4}\sqrt{5}$$

なので $\overline{AX}=\overline{BX}$ となるので 3 つの垂直 2 等分線は 1 点で交わる。