数学序論問題解説 #7

河野

演習問題 3.15　次に与えられる条件を満たす円の方程式を求めよ。

(1) 点 $(2,-1)$ がを中心，半径。3

(2) 点 $(-2,3)$ が中心，半径 4。

(3) 点 $(3,2)$ が中心，点 $(1,5)$ を通る。

(4) 点 $(-2,3)$ が中心，y 軸に接している。

(5) 2 点 $(-2,3),(4,1)$ を直径の両端とする。

(6) 点 $(2,4)$ が中心，半径 5。また，この円上で y 座標が 0 であるような点の座標を求めよ。

(1)　$(x-2)^2+(y+1)^2=9$

(2)　$(x+2)^2+(y-3)^2=16$

(3)　半径を r とすると方程式は $(x-3)^2+(y-2)^2=r^2$ となる。これが $(1,5)$ を通るので $(1-3)^2+(5-2)^2=r^2$ が成立する。よって $r^2=13$ である。求める方程式は $(x-3)^2+(y-2)^2=13$ である。

(4)　中心が $(2,4)$ の円が y 軸に接しているので半径は 2 である。求める方程式は $(x+2)^2+(y-3)^2=4$ である。

(5)　2 点の中点が円の中心なので中心は $\left(\dfrac{-2+4}{2},\dfrac{3+1}{2}\right)=(1,2)$ である。2 点の距離は $\sqrt{(4+2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ なので半径はその半分の $\sqrt{10}$ である。よって求める方程式は $(x-1)^2+(y-2)^2=10$ である。

(6)　方程式は $(x-2)^2+(y-4)^2=25$ である。$y=0$ と連立させて解くと $x=-1,5$ となる。求める点は $(-1,0)$ と $(5,0)$ である。

演習問題 3.16

(1) 方程式 $x^2+y^2-4x+2y-11=0$ の表す図形はどんな図形か述べ，図示せよ。

(2) 方程式 $x^2+y^2-8y+7=0$ の表す図形はどんな図形か述べ，図示せよ。

(3) 方程式 $x^2+y^2+4x+6y-3=0$ の表す図形はどんな図形か述べ，図示せよ。

(4) 方程式 $x^2+y^2-4x+2y+k=0$ が円を表すような定数 k の値の範囲を求めよ。

(5) 方程式 $x^2+y^2+2x-y+k=0$ が円を表すような定数 k の値の範囲を求めよ。

図は省略する。

(1)　$(x-2)^2+(y+1)^2=4^2$ となるので $(2,-1)$ を中心とする半径 4 の円である。

(2)　$x^2+(y-4)^2=3^2$ となるので $(0,4)$ を中心とする半径 3 の円である。

(3)　$(x+2)^2+(y+3)^2=4^2$ となるので $(-2,-3)$ を中心とする半径 4 の円である。

(4)　$(x-2)^2+(y+1)^2=5-k$ となる。半径 0 を円と認めれば $k\leqq 5$，認めなければ $k<5$ のとき円になっている。

(5)　$(x+1)^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{5}{4}-k$ となる。半径 0 を円と認めれば $k\leqq\dfrac{5}{4}$，認めなければ $k<\dfrac{5}{4}$ のとき円になっている。

演習問題 3.17　次の円と直線には共有点があるか？無ければ無いことを示し，あれば共有点の座標を求めよ。

(1) $x^2+y^2=4,y=x+2$　(2) $x^2+y^2=2,y=-x+2$　(3) $x^2+y^2=1,y=2x+5$

(1) $x^2+y^2=4$ に $y=x+2$ を代入して計算すると $x(x+2)=0$ を得る。よって $x=0,-2$ となる。共有点は存在して $(0,2)$ および $(-2,0)$ である。
(2) $x^2+y^2=2$ に $y=-x+2$ を代入して計算すると $(x-1)^2=0$ を得る。よって $x=1$ である。共有点は存在して $(1,1)$ である。共有点が 1 個なので直線はこの点で円と接している。
(3) $x^2+y^2=1$ に $y=2x+5$ を代入して計算すると $5x^2+20x+24=0$ を得る。この 2 次方程式の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=10^2-5\times 24=-20<0$ なので共有点は存在しない。

演習問題 3.18　次の各問いに答えよ。
(1) 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=2x+n$ の共有点の個数を調べよ。
(2) 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=3x+n$ の共有点の個数を調べよ。
(3) 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=mx+4$ が接するように定数 m の値を定めよ。また，その時の接点の座標を求めよ。
(4) 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=-2x+1$ の共有点の個数を求めよ。
(5) 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=\sqrt{3}x+2$ の共有点の個数を求めよ。
(6) 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=2x-4$ の共有点の個数を求めよ。
(7) 点 $(2,1)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の方程式および接点の座標を求めよ。

(1) $x^2+y^2=1$ に $y=2x+n$ を代入して計算すると $5x^2+4nx+n^2-1=0$ を得る。この 2 次方程式の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=(2n)^2-5(n^2-1)=5-n^2$ となる。よって $-\sqrt{5}<n<\sqrt{5}$ のとき共有点は 2 個，$n=\pm\sqrt{5}$ のとき共有点は 1 個存在し，それ以外のとき共有点は存在しない。
(2) $x^2+y^2=4$ に $y=3x+n$ を代入して計算すると $10x^2+6nx+n^2-4=0$ を得る。この 2 次方程式の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=(3n)^2-10(n^2-4)=40-n^2$ となる。よって $-2\sqrt{10}<n<2\sqrt{10}$ のとき共有点は 2 個，$n=\pm 2\sqrt{10}$ のとき共有点は 1 個存在し，それ以外のとき共有点は存在しない。
(3) $x^2+y^2=4$ に $y=mx+4$ を代入して計算すると $(m^2+1)x^2+8mx+12=0$ を得る。この 2 次方程式の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=4m^2-12$ となる。よって $m=\pm\sqrt{3}$ の接している。
(4) $x^2+y^2=1$ に $y=-2x+1$ を代入して計算すると $x(5x-4)=0$ を得る。よって共有点は 2 個である。
(5) $x^2+y^2=1$ に $y=2x-4$ を代入して計算すると $5x^2-16x+15=0$ を得る。この 2 次方程式の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=-11$ となる。よって共有点は存在しない。
(6) $(2,1)$ を通る直線の傾きを m とすると直線の方程式は $y=m(x-2)+1$ となる。$x^2+y^2=1$ に代入して計算すると $(m^2+1)x^2-2m(2m-1)x+4m(m-1)=0$ を得る。この 2 次方程式の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=m(4-3m)$ となる。$m=0,\dfrac{4}{3}$ となる。$m=0$ のとき接線の方程式は $y=1$ であり接点は $(0,1)$，$m=\dfrac{4}{3}$ のとき方程式は $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$ であり，接点は $\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$ である。