数学序論問題解説 #9

河野

演習問題 4.1　次の計算をせよ。

(1) $(3+5i)+(4-7i)$　　(2) $(2+3i)(3-4i)$

(3) $\dfrac{5+3i}{1+2i}$　　(4) $\dfrac{1}{5-2i}$

(1) $7-2i$ **(2)** $18+i$ **(3)** $\dfrac{11}{5}-\dfrac{7}{5}i$ **(4)** $\dfrac{5}{29}+\dfrac{2}{29}i$

演習問題 4.2　命題 4.2 を証明せよ。

$\alpha = a+bi$，$\alpha_1 = a_1+b_1 i$，$\alpha_2 = a_2+b_2 i$ とおく。

(1) $\overline{\alpha} = a-bi = a+(-b)i$ なので，$\overline{\overline{\alpha}} = a-(-b)i = a+bi = \alpha$ となる。

(2) $\alpha_1+\alpha_2 = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ なので

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_1+\alpha_2} &= \overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i} \\ &= (a_1+a_2)-(b_1+b_2)i \\ &= a_1-b_1 i+a_2-b_2 i \\ &= \overline{\alpha_1}+\overline{\alpha_2}\end{aligned}$$

(3) $\alpha_1\cdot\alpha_2 = (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$ なので

$$\overline{\alpha_1\cdot\alpha_2} = \overline{(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i} = (a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i$$

であるが,

$$\overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2} = (a_1-b_1i)\cdot(a_2-b_2i) = (a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i$$

となるので $\overline{\alpha_1\cdot\alpha_2} = \overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2}$ が成立する。

(4)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

なので

$$\overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)-(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

となる。一方

$$\frac{\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}} = \frac{a_1-b_1i}{a_2-b_2i} = \frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)} == \frac{(a_1a_2+b_1b_2)-(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

となるので

$$\overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \frac{\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}}$$

が成立する。

演習問題 4.3　次の問いに答えよ。
(1) $\alpha=0 \Longleftrightarrow |\alpha|=0$ を証明せよ。
(2) $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha||\beta|$ を示せ。

(1)　$\alpha=a_1+a_2i$ とおくと

$$\alpha=0 \Longleftrightarrow a_1=0 \text{ かつ } a_2=0 \Longleftrightarrow a_1^2+a_2^2=0 \Longleftrightarrow |\alpha|=0$$

となり成立する。
(2)　$\alpha=a_1+b_1i,\ \beta=a_2+b_2i$ とおくと

$$\alpha\cdot\beta=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$$

なので

$$\begin{aligned}|\alpha\cdot\beta|^2&=(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2\\&=a_1^2a_2^2-2a_1a_2b_1b_2+b_1^2b_2^2+a_1^2b_2^2-2a_1b_2a_2b_1+a_2^2b_1^2\\&=a_1^2(a_2^2+b_2^2)+b_1^2(a_2^2+b_2^2)\\&=(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\\&=(|\alpha|\,|\beta|)^2\end{aligned}$$

となる。$|\alpha\cdot\beta|\geqq 0,\ |\alpha|\geqq 0,\ |\beta|\geqq 0$ より $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\,|\beta|$ となる。

演習問題 4.4　図 4.3 を参考にして定理 4.3 を証明せよ。

(1)　$O,\ \beta,\ \alpha+\beta$ を頂点とする 3 角形を考える。ただし 3 角形がつぶれて 1 直線になっている場合も含むとする。この 3 角形の 3 辺の長さは $|\alpha|,\ |\beta|,\ |\alpha+\beta|$ なので三角不等式より

$$|\alpha+\beta|\leqq|\alpha|+|\beta|$$

が成立する。
(2)　$O,\ \alpha,\ \beta$ を頂点とする 3 角形を考える。ただし 3 角形がつぶれて 1 直線になっている場合も含むとする。この 3 角形の 3 辺の長さは $|\alpha|,\ |\beta|,\ |\alpha-\beta|$ なので三角不等式より

$$|\alpha|\leqq|\alpha-\beta|+|\beta|$$

が成立する。移行すると (2) 式の成立が分かる。

演習問題 4.5　次の複素数の極形式を求めよ。
(1) $\sqrt{3}+i$　(2) -2　(3) i　(4) $2\sqrt{3}-2i$　(5) $1-\sqrt{3}i$

(1)　$|\sqrt{3}+i|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1}=\sqrt{4}=2$ なので

$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

と書ける。$2\exp\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ と表してもよい。

(2)

$$-2 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = 2e^{i\pi}$$

となる。

(3)

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = \exp\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(4) $|2\sqrt{3}-2i| = \sqrt{12+4} = 4$ なので

$$2\sqrt{3}-2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\exp\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

となる。偏角をマイナスで選んだが $\frac{11\pi}{6}$ としてもよい。

(5) $|1-\sqrt{3}i| = 2$ なので

$$1-\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\exp\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

となる。

演習問題 4.6　次の問いに答えよ。

(1) $e^{i\theta}$ は，原点を中心とする半径 1 の円上の点であることを示せ。

(2) オイラーの公式を用いて次の等式を導け。

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

(1) $|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = sqrt1 = 1$ なので原点を中心とする半径 1 の円周上にある。

(2) $\cos(-\theta) = \cos\theta$，$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ より

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

となるので，

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta, \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

となる。これから (2) の式を得る。

演習問題 4.7　次の問いに答えよ。

(1) $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ を示せ。

(2) 系 4.6 を証明せよ。

(1)

$$(e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}e^{-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^0} = e^{-i\theta}$$

(2) n に関する数学的帰納法で証明する。$n=1$ のとき示すべき式は $(e^{i\theta})^1 = e^{i1\theta}$ なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する; 即ち $(e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}$ が成立していると仮定する。

$$(e^{i\theta})^{k+1} = (e^{i\theta})^k e^{i\theta} = e^{ik\theta}e^{i\theta} = e^{ik\theta+i\theta} = e^{i(k+1)\theta}$$

となり $n=k+1$ の成立が示された。よってすべての自然数に対し成立している。

演習問題 4.8 次の点を極形式で表し図示せよ。

(1) $\alpha = 2+2i$ (2) $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ (3) $\alpha\beta$ (4) $\dfrac{\beta}{\alpha}$

(1) $|\alpha| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ なので

$$\alpha = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

である。

(2) $|\beta| = \sqrt{\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}} = 1$ なので

$$\beta = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \exp\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

である。

(3)

$$\alpha\beta = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)\exp\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

(4)

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\exp\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(\frac{\pi}{6}\right)\exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

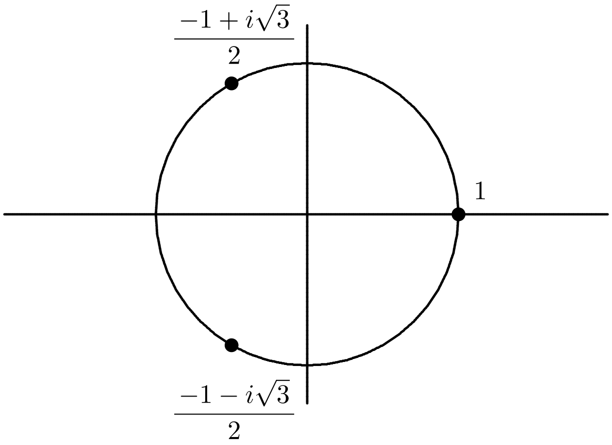
演習問題 4.9

(1) 1 の 3 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。

(2) 1 の 5 乗根を求め，複素平面に図示せよ。

(1) $z^3=1$ より $(z+1)(z^2+z+1)=0$ を得る。$z^2+z+1=0$ のときは $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ である。

図は次ページ。



(2) 極形式で考えると，$\omega_k = \exp\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$ $(k=1,2,3,4,5)$ が解になる。$\exp\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$ を代数的に表すこともできる。$z^5=1$ なので $(z+1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$ を解けばよい。$z^4+z^3+z\ 2+z+1=0$ の解を代数的に表す。この式を z^2 で割ると $z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$ を得る。$t=z+\frac{1}{z}$ とおくと $t^2=z^2+2+\frac{1}{z^2}$ なので $t^2+t-1=0$ となり，これを解いて $t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ となる。$\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ に対し $x+\frac{1}{x}=\alpha$ は 2 次方程式 $x^2-\alpha x+1=0$ と変形できる。よって

$$x = \frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$$

となる。解は

$$\omega_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i \qquad \omega_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i$$

$$\omega_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i \qquad \omega_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$$

と $z+1=0$ の解 $z=1$ の 5 個である。