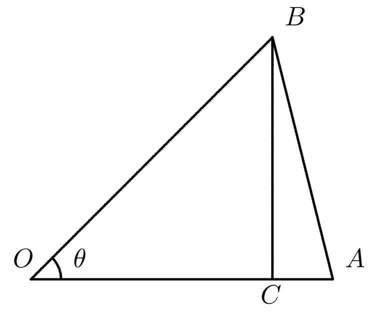
数学序論問題解説 #10

河野

演習問題 5.1　定理 5.1 を証明せよ。



$a = \overline{OA},\ b = \overline{OB},\ c = \overline{AB}$ とおく。点 B から直線 OA におろした垂線の足を C とする。また角 $\angle ABC = \varphi$ とおく。このとき $\overline{OC} = b\cos\theta,\ \overline{BC} = b\sin\theta,\ \overline{AC} = c\sin\varphi,\ \overline{BC} = c\cos\varphi$ が成立している。$a = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA} = b\cos\theta + c\sin\varphi$ より $a - b\cos\theta = c\sin\varphi$ と変形して両辺を 2 乗すると

$$a^2 - 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta = c^2\sin^2\varphi \tag{1}$$

となる。$b\sin\theta = \overline{BC} = c\cos\varphi$ の両辺を 2 乗すると

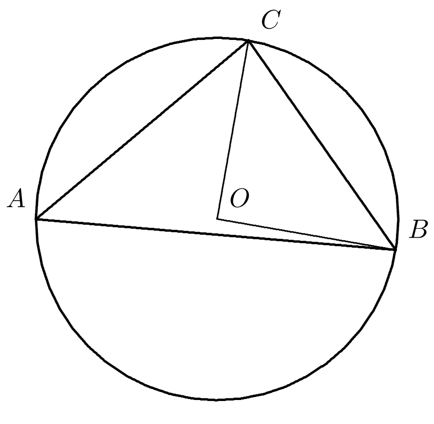
$$b^2\sin^2\theta = c^2\cos^2\varphi \tag{2}$$

が得られる。(1) 式と (2) 式を加えると

$$a^2 - 2ab\cos\theta + b^2 = c^2$$

となり，定理 5.1 が証明される。

演習問題 5.2　定理 5.2 を証明せよ。



外接円の半径を r とする。円周角 A に対応する中心角は $\angle BOC$ であり，中心角は円周角の 2 倍なので $\angle BOC = 2A$ が成立している。また $\triangle OBC$ は二等辺 3 角形なので $r\sin A = \dfrac{\overline{BC}}{2} = \dfrac{a}{2}$ より

$$\frac{a}{\sin A} = 2r$$

が成立する。他の角についても同様に示すことができる。

演習問題 5.3　以下の公式を，加法定理を使って示せ。

(1)

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \qquad \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \qquad \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

(2)

$$\sin(x\pm\pi) = -\sin x, \qquad \cos(x\pm\pi) = -\cos x$$

(3) $\tan x$ **の加法定理：**

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

(4) **倍角の公式：**

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

(5) **3 倍角の公式：**

$$\sin 3\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta, \qquad \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

(6) **半角の公式：**

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}, \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

(7) **和積公式：**

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\,\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\,\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\,\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\,\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

(8)　積和公式：

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\}\\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}\\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right\}\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}
\end{aligned}$$

(1)　$\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ が成立している。

$$\begin{aligned}
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin x\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\cos x\\
&= \sin x\cdot 0+1\cdot\cos x\\
&= \cos x\\
\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(x+\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \sin x\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos x\\
&= \sin x\cdot 0+(-1)\cdot\cos x\\
&= -\cos x\\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos x\cos\frac{\pi}{2}-\sin x\sin\frac{\pi}{2}\\
&= \cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1\\
&= -\sin x\\
\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(x+\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \cos x\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin x\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \cos x\cdot 0-\sin x\cdot(-1)\\
&= \sin x
\end{aligned}$$

(2)　$\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$, $\sin(-\pi)=0$, $\cos(-\pi)=-1$ が成立している。

$$\begin{aligned}
\sin(x+\pi) &= \sin x\cos\pi+\sin\pi\cos x\\
&= \sin x\cdot(-1)+0\cdot\cos x\\
&= -\sin x\\
\sin(x-\pi) &= \sin\left(x+(-\pi)\right)\\
&= \sin x\cos(-\pi)+\sin(-\pi)\cos x\\
&= \sin x\cdot(-1)+0\cdot\cos x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sin x \\
\cos(x+\pi) &= \cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi \\
&= \cos x \cdot (-1) + \sin x \cdot 0 \\
&= -\cos x \\
\cos(x-\pi) &= \cos\bigl(x + (-\pi)\bigr) \\
&= \cos x \cos(-\pi) - \sin x \sin(-\pi) \\
&= \cos x \cdot (-1) + \sin x \cdot 0 \\
&= -\cos x
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \\
&= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}
$$

次を示すために $\theta_1 + \theta_2$ を $\theta_1 - \theta_2$ に変えた場合の加法定理を示しておく。$\sin(-\theta_2) = -\sin\theta_2$ および $\cos(-\theta_2) = \cos\theta_2$ は知られている。

$$
\begin{aligned}
\sin(\theta_1 - \theta_2) &= \sin\bigl(\theta_1 + (-\theta)_2\bigr) \\
&= \sin\theta_1 \cos(-\theta_2) + \cos\theta_1 \sin(-\theta_2) \\
&= \sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\
\cos(\theta_1 - \theta_2) &= \cos\bigl(\theta_1 + (-\theta)_2\bigr) \\
&= \cos\theta_1 \cos(-\theta_2) - \sin\theta_1 \sin(-\theta_2) \\
&= \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2
\end{aligned}
$$

これを用いる。

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \\
&= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\sin 2\theta &= \sin(\theta + \theta) \\
&= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta \\
&= 2\sin\theta\cos\theta \\
\cos 2\theta &= \cos(\theta + \theta) \\
&= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&= \cos^2\theta - \left(1 - \cos^2\theta\right) \\
&= 2\cos^2\theta - 1 \\
&= 2\left(1 - \sin^2\theta\right) - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

(5) (4) の式を用いる。

$$
\begin{aligned}
\sin 3\theta &= \sin(\theta + 2\theta) \\
&= \sin\theta\cos 2\theta + cos\theta\sin 2\theta \\
&= \sin\theta\bigl(1 - 2\sin^2\theta\bigr) + \cos\theta\bigl(2\sin\theta\cos\theta\bigr) \\
&= \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta \\
&= \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\left(1 - \sin^2\theta\right) \\
&= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\
\cos 3\theta &= \cos(\theta + 2\theta) \\
&= \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta \\
&= \cos\theta\bigl(2\cos^2\theta - 1\bigr) - \sin\theta\bigl(2\sin\theta\cos\theta\bigr) \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta\bigl(1 - \cos^2\theta\bigr) \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}
$$

(6) (4) のコサインの倍角公式より従う。θ を $\dfrac{\theta}{2}$ で置き換えて

$$
\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2}, \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2}
$$

という書き方もされる。

(7) $X = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $Y = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ とおくと

$$X + Y = \alpha, \quad X - Y = \beta$$

が成立している。

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sin(X+Y) \\
&= \sin X\cos Y + \cos X\sin Y \\
\sin\beta &= \sin(X-Y) \\
&= \sin X\cos Y - \cos X\sin Y
\end{aligned}$$

が成立しているので

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= \sin X\cos Y + \cos X\sin Y + \sin X\cos Y - \cos X\sin Y \\
&= 2\sin X\cos Y \\
&= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\sin\alpha - \sin\beta &= \sin X\cos Y + \cos X\sin Y - \big(\sin X\cos Y - \cos X\sin Y\big) \\
&= 2\cos X\sin Y \\
&= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \cos(X+Y) \\
&= \cos X\cos Y - \sin X\sin Y \\
\cos\beta &= \cos(X-Y) \\
&= \cos X\cos Y + \sin X\sin Y
\end{aligned}$$

が成立しているので

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= \cos X\cos Y - \sin X\sin Y + \cos X\cos Y - \sin X\sin Y \\
&= 2\cos X\cos Y \\
&= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\cos\alpha - \cos\beta &= \cos X\cos Y - \sin X\sin Y - \big(\cos X\cos Y - \sin X\sin Y\big) \\
&= -2\sin X\sin Y \\
&= -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

(8) $A=\alpha+\beta,\ B=\alpha-\beta$ とおくと

$$\alpha=\frac{A+B}{2},\quad \beta=\frac{A-B}{2}$$

が成立している。すでに示した (7) の式において $\alpha,\ \beta$ をそれぞれ $A,\ B$ に置き換える。(7) の最初の式を置き換えると

$$\sin A+\sin B=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=2\sin\alpha\cos\beta$$

即ち

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}$$

が得られる。2 番目の式を置き換えると

$$\sin A-\sin B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)=2\cos\alpha\sin\beta$$

即ち

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right\}$$

が得られる。3 番目の式を置き換えると

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=2\cos\alpha\cos\beta$$

即ち

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}$$

が得られる。4 番目の式を置き換えると

$$\cos A-\cos B=-2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

即ち

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}$$

が得られる。