数学序論問題解説 #11

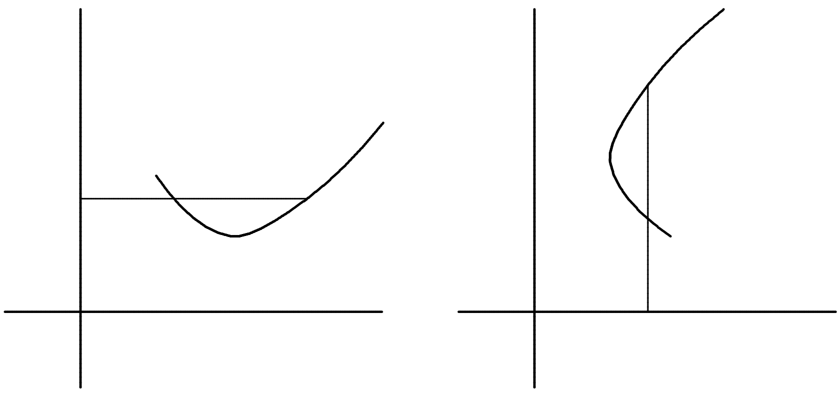
河野

演習問題 5.4　この命題を証明せよ。

最初に f が単調増加の場合を考える。f は単調増加なので「 任意の $x_1, x_2 \in I$ について $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ 」が成立している。f が単射であるとは「 任意の $x_1, x_2 \in I$ に対し $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ 」が成立することを示せばよい。$x_1, x_2 \in I$ に対して $x_1 \neq x_2$ が成立しているとする。このとき「$x_1 < x_2$ または $x_2 < x_1$」が成立している。$x_1 < x_2$ のとき単調増加より $f(x_1) < f(x_2)$ が成立し，$x_2 < x_1$ のとき単調増加より $f(x_2) < f(x_1)$ が成立する。いずれの場合も $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成立するので，f は単射である。

次に f が単調減少の場合を考える。f は単調減少なので「 任意の $x_1, x_2 \in I$ について $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ 」が成立している。f が単射であるとは「 任意の $x_1, x_2 \in I$ に対し $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ 」が成立することを示せばよい。$x_1, x_2 \in I$ に対して $x_1 \neq x_2$ が成立しているとする。このとき「$x_1 < x_2$ または $x_2 < x_1$」が成立している。$x_1 < x_2$ のとき単調減少より $f(x_1) > f(x_2)$ が成立し，$x_2 < x_1$ のとき単調減少より $f(x_2) > f(x_1)$ が成立する。いずれの場合も $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成立するので，f は単射である。

演習問題 5.5　単射ではない関数のグラフを，直線 $y = x$ に関して対称な位置に写すとどうなるのか述べよ。



単射でない場合 $x_1 \neq x_2$ が存在して $f(x_1) = f(x_2)$ が成立する。即ち点 $(x_1, f(x_1))$ および点 $(x_2, f(x_2))$ を通る直線は x 軸に平行である。これを直線 $y = x$ に関して折り返すと，折り返したグラフ上には，同じ x 座標を持つ異なる 2 点が存在することになる。関数は 1 つの x に対し 1 つの関数の値しか存在しないので，このような曲線をグラフに持つ関数は存在しないことがわかる。

演習問題 5.6　命題 5.8 を証明せよ。

m に関しては，自然数の場合，0 の場合，負の整数の場合の 3 通りの場合があり，n に関しても 3 通りの場合があるので，9 通りの場合に分けて考える。

最初に m, n が自然数の場合を考える。このときは

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{ 個}}$$

なので

$$\begin{aligned} a^m a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{ 個}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{ 個}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m+n\text{ 個}} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \left(a^m\right)^n &= \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n\text{ 個}} \\ &= \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{ 個}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{ 個}} \cdots \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{ 個}}}_{n\text{ 個}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{mn\text{ 個}} = a^{mn} \end{aligned}$$

となる。よって $m, n \in \mathbb{N}$ の場合指数法則は成立する。

次に一方が 0 の場合を考える。$n = 0$ の場合，$a^n = a^0 = 1$ であり，$\left(a^m\right)^n = \left(a^m\right)^0 = 1$ である。よって

$$a^m a^n = a^m a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0} = a^{m+n}$$

$$\left(a^m\right)^n = \left(a^m\right)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0} = a^{mn}$$

となる。$m = 0$ のとき $a^m = a^0 = 1$ である。ここで任意の $s \in \mathbb{Z}$ に対し $1^s = 1$ が成立することを注意しておく。$s \geqq 0$ のときは定義から成立するし，$s < 0$ のときは $s = -t$ $(t \in \mathbb{N})$ とおくと

$$1^s = 1^{-t} = \left(\frac{1}{1}\right)^t = 1^t = 1$$

より成立する。よって

$$a^m a^n = a^0 a^n = 1 \cdot a^n = a^n = a^{0+n} = a^{m+n}$$

$$\left(a^m\right)^n = \left(a^0\right)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{0 \cdot n} = a^{mn}$$

となり，この場合も成立している。

$m \in \mathbb{N}$ かつ n が負の整数の場合，$k = -n$ とおくと k は自然数であり，$a^n = a^{-k} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^k$ となっている。

$$a^m a^n = a^m \left(\frac{1}{a}\right)^k = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{ 個}} \cdot \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdots \frac{1}{a}}_{k\text{ 個}} \tag{1}$$

分母の a と分子の a が打ち消しあうが，ここでさらに 3 つの場合に分ける; (a) $m > k$ ，(b) $m = k$, (c) $m < k$ 。(a) の場合 (1) は $\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-k\text{ 個}}$ となる。よってこの場合

$$a^m a^n = a^{m-k} = a^{m+n}$$

となる。(b) の場合 (1) はすべてお互いに打ち消しあい 1 になる。よってこの場合

$$a^m a^n = 1 = a^0 = a^{m-k} = a^{m+n}$$

となる。(c) の場合 (1) は $\underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdots \frac{1}{a}}_{k-m\text{ 個}}$ となる。よってこの場合

$$a^m a^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{k-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-(m+n)} = a^{m+n}$$

となる。また

$$\begin{aligned}(a^m)^n = (a^m)^{-k} &= \underbrace{\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^m} \cdots \frac{1}{a^m}}_{k\text{ 個}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdots \frac{1}{a}}_{mk\text{ 個}} \\ &= a^{-mk} = a^{mn}\end{aligned}$$

となる。

これで 9 つの場合分けのうち 7 つが終わった。先はまだあるように見えるが，実は証明はほとんど終わっていると考えることができる。そのために次の式を成立を示す。

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

この式は $m \in \mathbb{N}$ のときは定義なので成立している。それ以外の場合の成立を言えばよい。$m = 0$ の場合

$$a^{-0} = a^0 = 1 = \left(\frac{1}{a}\right)^0$$

なので成立している。$m < 0$ のとき $m = -k$ とおくと $k \in \mathbb{N}$ であり，

$$\left(\frac{1}{a}\right)^m = \left(\frac{1}{a}\right)^{-k} = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)}\right)^k = a^k = a^{-(-k)} = a^{-m}$$

となり成立している。

今証明した式を用いると (a) $m < 0$ かつ $n > 0$ ，(b) $m < 0$ かつ $n < 0$ の場合証明でき，全体の証明が終わる。(a) の場合 $a^m = \left(\frac{1}{a}\right)^{-m}$，$a^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$ であり $-m > 0$ かつ $-n < 0$ なので

3 番目の場合において a を $\dfrac{1}{a}$ に変えた式を考えると

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-m}\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^{(-m)+(-n)}$$

が成立している。よって

$$a^m a^n=\left(\frac{1}{a}\right)^{-m}\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^{(-m)+(-n)}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-(m+n)}=a^{m+n}$$

となる。ここで $m>0$ の場合は $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$ の成立が示されていることに注意すると，

$$\left(a^m\right)^n=\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{-m}\right)^n=\left(\frac{1}{a}\right)^{-mn}=a^{mn}$$

となり，この場合の成立が分かる。

(b) の場合 $a^m=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-m}$， $a^n=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-n}$ であり $-m>0$ かつ $-n>0$ なので 1 番目の場合において a を $\dfrac{1}{a}$ に変えた式を考えると

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-m}\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^{(-m)+(-n)}$$

が成立している。よって

$$a^m a^n==\left(\frac{1}{a}\right)^{-m}\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^{(-m)+(-n)}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-(m+n)}=a^{m+n}$$

となる。$\left(a^m\right)^n=a^{mn}$ の成立は前と同様にできる。

演習問題 5.7　a は正の実数とする。

(1)　n を自然数とする。$b^n=a$ を満たすような正の実数 b はただ一つしかないことを証明せよ。

(2)　p,q が 0 ではない整数の時，$\left(a^{1/q}\right)^p=(a^p)^{1/q}$ を示せ.

(3)　$p,\ q,\ s,\ t$ が 0 ではない整数であって $p/q=s/t$ となっている時，$\left(a^{1/q}\right)^p=\left(a^{1/t}\right)^s$ となることを示せ。

(4)　任意の有理数 u,v に対して，次が成り立つことを示せ。

$$a^{u+v}=a^u a^v,\qquad (a^u)^v=a^{uv}$$

(5)　任意の有理数 u に対して $a^u>0$ を示せ。

(6)　$1<a$ の時，有理数 u,v が $u<v$ ならば $a^u<a^v$ を示せ。

(7)　$0<a<1$ の時，有理数 u,v が $u<v$ ならば $a^u>a^v$ を示せ。

(1)　$b_1^n=a=b_2^n$ となる正の実数 b_1,b_2 が存在したとする。このときべき根関数 $y=f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ に対し $b_1=f(a)$ かつ $b_2=f(a)$ となるので，$b_1=b_2$ となる。

(2)　(1) の結果より自然数 n に対し「 $b^n=a\iff b=a^{\frac{1}{n}}$ 」が分かる。ここで最初に 0 でない整数 p に対し「 $b^p=a\iff b=a^{\frac{1}{p}}$ 」の成立を示しておく。$p>0$ の場合は (1) で示した

ので $p<0$ とする。$p=-k$ とおくと k は自然数である。$b^p=b^{-k}=\left(\dfrac{1}{b}\right)^k$ なので (1) より「$b^p=a \Longleftrightarrow \left(\dfrac{1}{b}\right)^k=a \Longleftrightarrow \dfrac{1}{b}=a^{\frac{1}{k}}$」が成立するが $b=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{k}}}=a^{-\frac{1}{k}}=a^{\frac{1}{-k}}=a^{\frac{1}{n}}$ となり成立する。

$b=a^{\frac{1}{q}}$ とおくと $a=b^q$ が成立している。

$$a^p=\left(b^q\right)^p=b^{qp}=b^{pq}=\left(b^p\right)^q$$

より

$$\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}=b^p=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

が成立している。

(3) $b=a^{\frac{1}{q}}$, $c=a^{\frac{1}{t}}$ とおくと $a=b^q$, $a=c^t$ が成立している。

$$a^p=\left(b^q\right)^p=b^{qp}=b^{pq}=\left(b^p\right)^q$$

であり，$tp=sq$ より

$$a^p=\left(c^t\right)^p=c^{tp}=c^{sq}=\left(c^s\right)^q$$

が成立している。$\left(b^p\right)^q=\left(c^s\right)^q$ なので (1) より $b^p=c^s$ が成立する。これを a を用いて書き直せば $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p=\left(a^{\frac{1}{t}}\right)^s$ が得られる。

(4) $u=0$ または $v=0$ の場合は整数のとき示したのと同様に示すことができる。よって u,v は 0 でない整数とする。(3) は有理数に対し，その分数の表示にかかわらず指数関数が決まることを意味している。即ち $u=\dfrac{p}{q}$ と表示しようと，$u=\dfrac{s}{t}$ と表示しようと，その表示によらない値として $a^u=a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{s}{t}}$ が決まることを意味している。よって最初の等式を証明するために分数表示はすでに通分されているとする；即ち $u=\dfrac{p_1}{q}$, $v=\dfrac{p_2}{q}$ (p_1,p_2,q は 0 でない整数) とする。このとき整数が指数の場合の指数法則は示されている。よって

$$\begin{aligned}
a^ua^v&=a^{\frac{p_1}{q}}a^{\frac{p_2}{q}}=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p_1}\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p_2}\\
&=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p_1+p_2}=a^{\frac{p_1+p_2}{q}}\\
&=a^{\frac{p_1}{q}+\frac{p_2}{q}}=a^{u+v}
\end{aligned}$$

となる。

次の式を示すために最初に

$$\left(a^{\frac{1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}=a^{\frac{1}{q_1q_2}}$$

を示す。ただし q_1,q_2 は 0 でない整数とする。$b=\left(a^{\frac{1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}$ とおくと $b^{q_2}=a^{\frac{1}{q_1}}$ である。さらに q_1 乗すると

$$a=(b^{q_2})^{q_1}=b^{q_2q_1}=b^{q_1q_2}$$

となるので (2) の最初に注意より $b=a^{\frac{1}{q_1q_2}}$ となる。

次に

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p=\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

を示す。$b=a^{\frac{1}{q}}$ とおくと $a=b^q$ である。これを p 乗すると

$$a^p=\left(b^q\right)^p=b^{qp}=b^{pq}=\left(b^p\right)^q$$

となるので

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p=b^p=\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

となる。

$u=\dfrac{p}{q}$, $v=\dfrac{s}{t}$ とおくと

$$\begin{aligned}(a^u)^v&=\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{s}{t}}=\left(\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)^{\frac{1}{t}}\right)^s\\&=\left(\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{t}}\right)^p\right)^s=\left(a^{\frac{1}{qt}}\right)^{ps}\\&=a^{\frac{ps}{qt}}=a^{uv}\end{aligned}$$

が得られる。

(5) 有理数 u は $u=\dfrac{p}{q}$ と分数表示できる。ここで q は正の整数, p は整数である。$a>0$ は常に仮定されているので $a^{\frac{1}{q}}>0$ である。これを p 乗した $a^u=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ も正である。

(6) 最初に正の整数 q に対し $a^{\frac{1}{q}}>1$ を背理法で示す。$a^{\frac{1}{q}}>0$ なので結論を否定すると

$$0<a^{\frac{1}{q}}\leqq 1$$

が成立している。q は正の整数なので q 乗しても不等号の向きは変わらない。よって

$$0<\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q\leqq 1^q=1$$

となるのが $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q=a$ なので $a\leqq 1$ となり矛盾。

次に正の有理数 $u=\dfrac{p}{q}$ に対し $a^u>1$ を示す。ここで p,q は正の整数とする。$a^{\frac{1}{q}}>1$ なので $a^u=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p>1$ となり成立する。

$u<v$ とすると $v-u>0$ なので今示したことより $a^{v-u}>1$ となるが $a^{v-u}=a^ua^{-v}$ であり両辺に a^u をかけると $a^v>a^u$ が得られる。

(7) $0<a<1$ のとき $b=\dfrac{1}{a}$ とおくと $b>1$ が成立している。$u<v$ のとき (6) より $b^u<b^v$ が, 即ち

$$\left(\frac{1}{a}\right)^u<\left(\frac{1}{a}\right)^v$$

が成立している。両辺に a^{v+u} をかけると

$$a^v<a^u$$

が得られる。

演習問題 5.8

(1)　$a,\, b,\, c$ を正の実数とする。$a^b = c^{b\log_c a}$ を示せ。
(2)　$a,\, b,\, c$ を正の実数とする。$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。

対数関数においては次が基本的である。

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y$$

(1)　$X = c^{b\log_c a}$ とおくと $b\log_c a = \log_c X$ となる。ここで $b\log_c a = \log_c a^b$ なので

$$\log_c a^b = \log_c X$$

となる。$\log_c$ は単射なので $a^b = X$ となり式が証明される。
(2)　最初に底の変換公式を導く。$X = \log_c a$，$y = \log_a b$ とおくと $a = c^X$，$b = a^Y$ が成立しているので

$$b = a^Y = \left(c^X\right)^Y = c^{XY}$$

となるので $XY = \log_c b$ となる。即ち

$$\log_c a\, \log_a b = \log_c b$$

が成立している。この式は

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

という形でも用いられる。
$X = a^{\log_c b}$ とおくと $\log_c b = \log_a X$ である。底の変換を用いると $\log_c b = \dfrac{\log_c X}{\log_c a}$ 即ち

$$\log_c a\, \log_c b = \log_c X$$

となる。$Y = b^{\log_c a}$ とおくと $\log_c a = \log_b Y$ である。底の変換を用いると $\log_c a = \dfrac{\log_c Y}{\log_c b}$ 即ち

$$\log_c a\, \log_c b = \log_c Y$$

となる。よって $\log_c X = \log_c Y$ であるが単射より $X = Y$ が成立する。

演習問題 5.9
(1)　次の値を求めよ。

$$\sin^{-1}\frac{1}{2},\quad \cos^{-1}\frac{1}{2},\quad \tan^{-1}1,\quad \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \tan^{-1}\sqrt{3},\quad \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2)　$-1 \leqq x \leqq 1$ の時，$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。
(3)　$x > 0$ の時，$\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。
(4)　$\tan^{-1}x = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。

逆三角関数においては次が基本的である。

$$y=\arcsin x \Longleftrightarrow x=\sin y \qquad (-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2})$$
$$y=\arccos x \Longleftrightarrow x=\cos y \qquad (0\leqq y\leqq\pi)$$
$$y=\arctan x \Longleftrightarrow x=\tan y \qquad (-\frac{\pi}{2}< y<\frac{\pi}{2})$$

(1) $x=\arcsin\dfrac{1}{2}$ とおくと
$$\frac{1}{2}=\sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$
なので $x=\dfrac{\pi}{6}$, 即ち $\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$ となる。

$x=\arccos\dfrac{1}{2}$ とおくと
$$\frac{1}{2}=\cos x \quad (0\leqq x\leqq\pi)$$
なので $x=\dfrac{\pi}{3}$, 即ち $\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ となる。

$x=\arctan 1$ とおくと
$$1=\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}< x<\frac{\pi}{2}\right)$$
なので $x=\dfrac{\pi}{4}$, 即ち $\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$ となる。

$x=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと
$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$
なので $x=\dfrac{\pi}{4}$, 即ち $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{4}$ となる。

$x=\arctan\sqrt{3}$ とおくと
$$\sqrt{3}=\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}< x<\frac{\pi}{2}\right)$$
なので $x=\dfrac{\pi}{3}$, 即ち $\arctan\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$ となる。

$x=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと
$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}< x<\frac{\pi}{2}\right)$$
なので $x=\dfrac{\pi}{6}$, 即ち $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$ となる。

(2) $u=\arcsin x$ とおくと $x=\sin u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq u\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ であり, $v=\arccos x$ とおくと $x=\cos v$ $(0\leqq v\leqq\pi)$ である。演習問題 5.3 (1) を用いると
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=\sin\left(-\left(v-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\sin\left(v-\frac{\pi}{2}\right)=-\big(-\cos v\big)=\cos v$$

の成立が示される。$0 \leqq v \leqq \pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2} - v \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right) = \cos v = x = \sin u$ なので $\dfrac{\pi}{2} - v = u$ となり，$u + v = \dfrac{\pi}{2}$ となる。

(3)　$u = \arctan x$ とおくと $x = \tan u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。$x > 0$ より $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$ となっている。$v = \arctan \dfrac{1}{x}$ とおくと $\dfrac{1}{x} = \tan v$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。$\dfrac{1}{x} > 0$ より $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$ となっている。演習問題 5.3 (1) を用いると

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos\left(-\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = \sin v$$

の成立が示される。これより

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)} = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v} = x = \tan u$$

が成立する。u, v ともに $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < v < \dfrac{\pi}{2}$ なので $0 < \dfrac{\pi}{2} - v < \dfrac{\pi}{2}$ となり，$\dfrac{\pi}{2} - v = u$ が成立する。

(4)　$u = \arctan x$ とおくと $x = \tan u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であり，$v = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin v$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq v \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ となる。

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 u = 1 + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$$

であるが，$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos u > 0$ なので $\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{\cos u}$ となる。

$$\sin v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos u \tan u = \sin u$$

であり，$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq v \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $u = v$ となる。

演習問題 5.10　次を示せ。

(1)　$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2)　$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$

(3)　$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$

(1)　$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$，$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ なので

$$\cosh^2 x = \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$$
$$\sinh^2 x = \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

なので

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{4}{4} = 1$$

が成立する。

(2)

$$\begin{aligned}\cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} + \frac{e^{a+b} - a^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} = \cosh(a+b)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a + e^{-a}}{2} \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{e^{a+b} - e^{-a+b} + e^{a-b} - e^{-a-b}}{4} + \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} - e^{a-b} - e^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{e^{(a+b)} - e^{-(a+b)}}{2} = \sinh(a+b)\end{aligned}$$

演習問題 5.11

(1) $\cosh x$ を $[\,0, \infty\,)$ に制限した関数の逆関数を $\cosh^{-1} x$ とする。これは $[\,1, \infty\,)$ から $[\,0, \infty\,)$ への関数である。

$$\cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

であることを示せ。

(2) $\sinh x$ の逆関数を $\sinh^{-1} x$ とする。これは $\mathbb{R}$ 全体で定義された関数である。

$$\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

であることを示せ。

(3) $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ とする。任意の x に対して $|\tanh x| < 1$ を示せ。

(4) $\tanh x$ は単調増加関数であることを (微分を使わずに) 示せ。

(1) $y = \cosh^{-1} x$ とおくと $x = \cosh y$ $(y \geqq 0)$ である。このとき $x \geqq 1$ が成立している。$Y = e^y$ とおくと $Y \geqq 1$ となっている。

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{Y + \dfrac{1}{Y}}{2}$$

より

$$Y^2 - 2xY + 1 = 0$$

が成立している。2 次方程式の解の公式より

$$Y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

となる。$Y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ が成立しているとすると，$Y \geqq 1$ より $x - \sqrt{x^2 - 1} \geqq 1$ となり，

$$x - 1 \geqq \sqrt{x^2 - 1}$$

が成立している。両辺を 2 乗すると $1 \leqq x$ を得るが $x \geqq 1$ より $x = 1$ となる。このときは $x + \sqrt{x^2-1} = x - \sqrt{x^2-1}$ となるので，$Y = x + \sqrt{x^2-1}$ のときのみ考えればよい。以上の考察により

$$y = \log Y = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

となる。

(2) $y = \sinh^{-1} x$ とおくと $x = \sinh y$ である。$Y = e^y$ とおくと $Y > 0$ である。

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{Y - \dfrac{1}{Y}}{2}$$

より

$$Y^2 - 2xY - 1 = 0$$

が成立している。2 次方程式の解の公式より

$$Y = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

となる。$Y = x - \sqrt{x^2+1}$ が成立しているとすると，$Y \leqq 0$ より矛盾，よって $Y = x + \sqrt{x^2+1}$ となる。

$$y = \log Y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

となる。

(3) $X = e^x$ とおくと $X > 0$ である。

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{X - \dfrac{1}{X}}{X + \dfrac{1}{X}} = \frac{X^2-1}{X^2+1} = \frac{X^2+1-2}{X^2+1} = 1 - \frac{2}{X^2+1}$$

となる。$X^2 > 0$ より $X^2 + 1 > 1$ であり，

$$0 < \frac{1}{X^2+1} < 1$$

となる。

$$0 > -\frac{2}{X^2+1} > -2$$

の両辺に 1 を加えると $1 > 1 - \dfrac{2}{X^2+1} > -1$ となる。

(4) 最初に $y = f(X) = \dfrac{2}{X^2+1}$ は $X > 0$ で単調減少であることを注意しておく。即ち $0 < X_1 < X_2$ ならば $f(X_1) > f(X_2)$ が成立している。x_1, x_2 を $x_1 < x_2$ を満たす任意の実数とする。このとき $X_1 = e^{x_1}$，$X_2 = e^{x_2}$ とおくと $y = e^x$ は単調増加なので $X_1 < X_2$ が成立している。よって $f(X_1) > f(X_2)$ となり，$-f(X_1) < -f(X_2)$ となる。これに 1 を加えると

$$1 - \frac{2}{X_1^2+1} < 1 - \frac{2}{X_2^2+1}$$

となり $\tanh x_1 < \tanh x_2$ となる。よって $\tanh x$ は単調増加である。