

演習問題 6.1 $(a+h)^n$ の 2 項展開 $(a+h)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^{n-k} h^k$ をもちいて

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

を示せ。

導関数の定義より

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + {}_n C_1 x^{n-1} h + {}_n C_2 x^{n-2} h^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} x h^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}_n C_1 x^{n-1} h + {}_n C_2 x^{n-2} h^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} x h^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} ({}_n C_1 x^{n-1} + {}_n C_2 x^{n-2} h + \cdots + {}_n C_{n-1} x h^{n-2} + h^{n-1}) \\ &= {}_n C_1 x^{n-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

演習問題 6.2 $(\cos x)' = -\sin x$ を示せ。

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

であるが

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

より $(\cos x)' = -\sin x$ となる。

演習問題 6.3 逆は成立しない。反例をあげよ。

例えば $y = f(x) = |x|$ を考える。

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0)$$

となるので $y = f(x)$ は $x = 0$ で連続である。しかし

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h - 0}{h} = 1 \\ \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow -} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h - 0}{h} = -1\end{aligned}$$

となるので $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ は存在しない。よって $y = f(x)$ は $x = 0$ で微分可能ではない。
 $h \rightarrow +0$ は正の方向から h を 0 に近づけることを意味する。同様に $h \rightarrow -0$ は負の方向から h を 0 に近づけることを意味する。 $h \rightarrow 0$ としたときの極限が存在する必要十分条件は $h \rightarrow +0$ とした極限と $h \rightarrow -0$ とした極限が共に存在して、極限值が等しいことである。

演習問題 6.4 次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限值は用いてよい。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

- (1) $y = x^3$ (2) $y = \frac{x+1}{x^2+1}$
 (3) $y = \cos 2x$ (4) $y = \log x$

注意: 「定義に基づいて」というのは微積分の諸公式を用いず定義から計算することにより求めることをいう。 $y = f(x)$ の導関数なら $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を計算することにより求める。

(1)

$$\begin{aligned}(x^3)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(x+h)+1}{(x+h)^2+1} - \frac{x+1}{x^2+1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(x+h+1)(x^2+1)}{(x+h)^2+1} - \frac{(x+1)((x+h)^2+1)}{(x^2+1)((x+h)^2+1)} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{h(x^2+1) - (2hx+h^2)(x+1)}{(x^2+1)((x+h)^2+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2+1) - (2x+h)(x+1)}{(x^2+1)((x+h)^2+1)} \\ &= \frac{1-2-x^2}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\cos 2x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2(x+h) - \cos 2x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cos 2h - \sin 2x \sin 2h - \cos 2x}{h} \\&= \cos 2x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2h - 1}{h} - \sin 2x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{h} \\&= \cos 2x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2h - 1}{2h} \cdot 2 - \sin 2x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} \cdot 2 \\&= -2 \sin 2x\end{aligned}$$

(4) $\log x$ に関する極限は知られていない。使ってよいのは e^x に関する極限なので、そちらに直す必要がある。

$$(\log x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

であるが、 $k = \log(x+h) - \log x$ とおくと $h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ となっている。 $\log(x+h) - \log x = \log \frac{x+h}{x}$ であり、 $k = k \log e = \log e^k$ なので

$$\log e^k = \log \frac{x+h}{x}$$

が成立している。 $y = \log x$ は単射なので $e^k = \frac{x+h}{x}$ が成立している。これを变形すると

$$h = x(e^k - 1)$$

となる。よって

$$\begin{aligned}(\log x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\&= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{x(e^k - 1)} \\&= \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^k - 1}{k}} \\&= \frac{1}{x} \frac{1}{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^k - 1}{k}} \\&= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

となる。

演習問題 6.5 次の有理関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \frac{x-1}{x+1}$

(2) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

(3) $y = \frac{1}{x^2+1}$

(1)

$$\begin{aligned}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' &= \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - 2\frac{1}{x+1} = 1 - 2(x+1)^{-1}$$

と考えると、 $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = -2(-1)(x+1)^{-1-2} = \frac{2}{(x+1)^2}$ としてもよい。

(2)

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' &= \frac{(x^2+1)'(x^2-1) - (x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-4x}{(x^2-1)^2}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' &= \frac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

演習問題 6.6 次の関数を微分せよ。

(1) $x^2 + 3x + 2$

(2) $3 \sin x + 2e^x$

(3) $(x^2 + 2)(x^2 + 3)$

(4) $\sin(3x + 1)$

(5) $e^x \sin x$

(6) $x^2 \cos(x^2 + 1)$

(1) 和の形になっているので、それぞれの導関数の和になる。定数倍の導関数は導関数の定数倍である。これらを用いると次のようになる。

$$(x^2 + 3x + 2)' = 2x + 3$$

(2) (1) と同様である。

$$3 \cos x + 2e^x$$

(3) 展開してから微分してもできるが、ここでは積の微分法を用いる。

$$\begin{aligned}\left((x^2+2)(x^2+3)\right)' &= (x^2+2)'(x^2+3) + (x^2+2)(x^2+3)' \\ &= 2x(x^2+3) + (x^2+2)2x \\ &= 2x(2x^2+5)\end{aligned}$$

(4) $y = \sin(3x + 1)$, $u = 3x + 1$ とおくと $y = \sin u$ である。合成関数の導関数より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

となる。 $\frac{dy}{du} = \cos u$, $\frac{du}{dx} = 3$ なので

$$(\sin(3x+1))' = \cos u \cdot 3 = 3 \cos(3x+1)$$

となる。

(5) 積の微分法。

$$\begin{aligned}(e^x \sin x)' &= (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x\end{aligned}$$

(6) 積の微分法より

$$(x^2 \cos(x^2+1))' = (x^2)' \cos(x^2+1) + x^2 (\cos(x^2+1))'$$

となる。 $y = \cos(x^2+1)$, $u = x^2+1$ とおくと $y = \cos u$ なので $\frac{dy}{du} = -\sin u$ が成立する。また $\frac{du}{dx} = 2x$ となる。よって

$$(\cos(x^2+1))' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = -\sin u \cdot 2x = -2x \sin(x^2+1)$$

となるので

$$(x^2 \cos(x^2+1))' = 2x \cos(x^2+1) - 2x^3 \sin(x^2+1)$$

演習問題 6.7 次を示せ。

$$(1) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (2) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(1) $y = \arctan x$ とおくと $x = \tan y$ ($-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$) となっている。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

なので

$$(\arctan x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$$

(2) $y = \arccos x$ とおくと $x = \cos y$ ($0 \leq y \leq \pi$) となっている。 $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より $\sin y = \pm \sqrt{1 - \cos^2 y}$ であるが、 $0 \leq y \leq \pi$ なので $\sin y \geq 0$ となっており、 $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ となる。よって

$$(\arccos x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

演習問題 6.8 次を示せ。

$$y = \log|x| \quad (x \neq 0) \quad \text{とおくと} \quad y' = \frac{1}{x}$$

$x > 0$ のときはすでに示されているので, $x < 0$ の場合を考える。 $x = -t$ とおくと $t > 0$ より $|x| = t$ となっている。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \log t \cdot (-1) = -\frac{1}{t} = \frac{1}{-t} = \frac{1}{x}$$

演習問題 6.9 次を示せ。

$$\left\{ x \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) \right\}' = \arctan x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \text{ より}$$

$$(x \arctan x)' = x' \arctan x + x (\arctan x)' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

となる。また

$$(\log(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

なので

$$\begin{aligned} \left\{ x \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) \right\}' &= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} \\ &= \arctan x \end{aligned}$$

となる。

演習問題 6.10 対数微分法をもちいて次の微分をもとめよ。

$$(1) x^{\sin x} \qquad (2) \sqrt{\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3}}$$

(1) $y = x^{\sin x}$ とおく。 $z = \log y = \log x^{\sin x} = \sin x \log x$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= (\sin x \log x)' \\ &= (\sin x)' \log x + \sin x (\log x)' \\ &= \cos x \log x + \sin x \frac{1}{x} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

なので

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{dz}{dx} = x^{\sin x} \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

となる。

(2) $y = \sqrt{\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3}}$ とおく。 $z = \log y$ とおくと

$$\begin{aligned} z = \log y &= \log \sqrt{\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3}} = \log \left(\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log \frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3} \\ &= \frac{1}{2} \left(\log(x^2 + 2)^2 - \log(x^2 + 3)^3 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2 \log(x^2 + 2) - 3 \log(x^2 + 3) \right) \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 2} - \frac{3x}{x^2 + 3}$$

となる。 $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$ かつ $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}$ なので

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{dz}{dx} = y \left(\frac{2x}{x^2 + 2} - \frac{3x}{x^2 + 3} \right) = \sqrt{\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3}} \left(\frac{2x}{x^2 + 2} - \frac{3x}{x^2 + 3} \right)$$