

- 1 P, Q を命題とする。 $\neg P, P \wedge Q, P \vee Q, P \implies Q$ の真理表は次のようになっている。このとき次の問いに答えよ。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

- (1) $\neg(P \vee Q)$ と $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ が同値であることを真理表を用いて示せ。
 (2) $P \wedge (Q \vee R)$ と $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ が同値であることを真理表を用いて示せ。

- 2 次の命題の否定命題を述べ、その否定命題の真偽を理由をつけて答えよ。

$$\text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ に対し } x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geq 0 \text{ が成立する。}$$

- 3 写像 $f: X \rightarrow Y$ が単射であるとは、「任意の $x, x' \in X$ に対し $x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$ が成立する」ことである。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 「写像 $f: X \rightarrow Y$ が単射でない」という命題を「任意」と「存在」を用いて表せ。
 (2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定義する。このとき f が単射でないことを示せ。

- 4 $\sin x$ および $\cos x$ の加法定理は次である。

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

これを用いて次を示せ。

- (1) $\sin 3\theta = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta$
 (2) $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
 (3) $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \left\{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \right\}$

- 5 対数関数に関し次を証明せよ。

- (1) $\log_a pq = \log_a p + \log_a q$ (2) $\log_a p^c = c \log_a p$
 (3) $\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}$

- 6 $-1 \leq x \leq 1$ のとき、 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ を示せ。

- 7 双曲線関数に関し次を示せ。

- (1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (2) $\cosh(a + b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$

- 8 次の関数を定義に基づき微分せよ。微分方の諸公式を用いてはいけない。ただし次の式は用いてよい。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(1) $y = \cos x$

(2) $y = \log x$

(3) $y = x^4$

- 9 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ が成立することを示せ。

- 10 次の関数を微分せよ。諸公式を用いてよい。

(1) $3 \sin x + 2e^x$

(2) $\sin(3x + 1)$

(3) $e^x \sin x$

(4) $x^2 \cos(x^2 + 1)$

- 11 $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$ のグラフに接し、 $y = 2x + 1$ に平行な直線の方程式を求めよ。

- 12 次の関数のグラフの概形を描け。

(1) $f(x) = 2x^2 - x^4$

(2) $f(x) = xe^{-x}$

(3) $f(x) = x^2 \log x$

(4) $f(x) = 3 \sin x + \sin 3x$

(5) $f(x) = x - \sqrt{1 + x}$

(6) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

- 13 次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

(1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$

(2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$

- 14 以下の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos(\alpha x)}{\log \cos(\beta x)}$